

ALCUNE CONSIDERAZIONI CIRCA LA POSSIBILITÀ DI APPLICAZIONE DEL METODO PROBABILISTICO DELL'ANALISI DEL PRIMO ORDINE ALLE COSTRUZIONI IDRAULICHE CON PARTICOLARE RIGUARDO ALLE OPERE DI TRASPORTO

IGNAZIO MANTICA (*)

SOMMARIO: L'A., dopo aver richiamato i principi di base della teoria probabilistica, descrive la particolare metodologia nota come « Analisi del primo ordine » che si basa sulla introduzione del concetto di « Performance function ».

L'A. definisce questa funzione come differenza tra « sollecitazione o domanda e prestazione o resistenza »; dopo applica il metodo alle costruzioni idrauliche di trasporto.

Conclude il suo lavoro indicando i vantaggi del metodo proposto nei confronti di quello tradizionale.

Résumé: L'auteur, après avoir rappelé les principes de base à laquelle la méthode probabilité s'informe, illustre la particulière méthodologie connue comme « Analyse du premier ordre », qui se fonde sur l'introduction de la conception de « Performance function ».

L'auteur définit cette fonction comme différence entre « la sollicitation ou demande et la prestation ou résistance »; après il applique la méthode aux constructions hydrauliques d'adduction.

Il conclue son travail en soulignant la meilleure application de la méthode proposée à côté de celle traditionnelle.

Summary: The author, after recalling the basic principles of the probabilistic theory, describes the particular methodology known as « First order analysis », which is based on the « Performance function ».

He defines this function as a difference between « the strain or request and the performance or resistance » and then he applies this method to the hydraulic works of piping.

He concludes his work pointing out the advantages of the outlined method over the traditional one.

Zusammenfassung: Nachdem der Verfasser den Grundgedanke der Wahrscheinlichkeitstheorie ins Gedächtnis zurückgerufen hat, beschreibt er die besondere Methode, die man als « Analysis der ersten Reihenfolge » kennt; die Methode gründet sich auf den Hauptsatz von « Performance function ».

Der Verfasser nennt diese Funktion eine Differenz zwischen « der Beanspruchung oder der Forderung » und zwischen « der Leistung oder dem Widerstand »; Er wendet diese Theorie auf die Wasserbeförderung auf dem Gebiet der Wasserbauten an.

Am Ende seiner Arbeit zeigt er die Vorteile des vorgeschlagenen Systems gegenüber dem traditionellen System.

Premesse

La presente nota desidera proporre un procedimento di calcolo di verifica delle opere idrauliche (ponendo particolarmente l'accento su quelle di trasporto) basato sull'applicazione dei metodi probabilistici.

Questi metodi, che hanno incontrato recentemente grande favore presso gli studiosi delle Università nord-americane ed ancora in tempi più vicini, anche nelle nostre regioni, sia pur limitatamente alla sola ingegneria strutturale, si basano sulla applicazione della teoria delle decisioni che, a sua volta, trova fondamento nel teorema di Bayes.

Non è però mia intenzione dare, o ricordare, in questa sede un quadro completo di questa teoria, rimando quindi al testo di BENJAMIN & CORNELL (1970) ed a varie opere di ANG & CORNELL (1974),

(*) Assistente ordinario presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Ancona.

ANG (1973), ANG & AMIN (1968), BERNIER (1967), CORNELL (1972), CORNELL (1973), CORNELL (1974), DAVIS, KISIEL & DUCKSTEIN (1972), DAVIS & DVORANCHIK (1974), HOWARD (1966), YEN & ANG (1971), YEN (1970), nonché al lavoro di AUGUSTI (1974) ed alle bibliografie in essi citate.

Nella bibliografia del presente vi sono i riferimenti di alcuni importanti lavori degli Autori sopra citati.

Per quanto riguarda invece la più generale teoria delle decisioni sono fondamentali i testi di SAVAGE (1954) e DE FINETTI (1970).

Qui di seguito sono solo alcuni richiami necessari alla comprensione della metodologia usata.

1 - Metodologia

Un generico progetto ingegneristico è sempre gravato da incertezze, di varia natura, circa la stima dei parametri di base al progetto stesso. Dalla bontà della stima di questi parametri dipende « l'affidabilità » cioè il successo o meno della realizzazione.

Con i tradizionali sistemi di calcolo si aggira l'ostacolo delle incertezze tramite l'adozione di un coefficiente di sicurezza, la cui misura viene stabilita sulla base di sperimentazioni od esperienze.

Generalmente ogni realizzazione è caratterizzata da due parametri (equidimensionali) che per il momento indicheremo con R (resistenza) ed S (sollecitazione); il successo di un progetto è dato dal verificarsi dell'evento:

$$R \geq S \quad (1)$$

tramite questa relazione è possibile stabilire in un piano cartesiano (S su R) una regione U di dominio di insuccesso (Unsafe region); i punti $P(R, S)$ rappresentano le possibili combinazioni di sollecitazione e resistenza, la (1) diventa allora:

$$P_{\text{fail}} = P_r [P(R, S) \in U \text{ almeno una volta in } (0, T)] \quad (2)$$

dove T è la durata della vita dell'opera mentre con P_{fail} è stata indicata la probabilità di insuccesso (failure).

La (2) è anche suscettibile di una generalizzazione spaziale⁽¹⁾ e viene utilizzata tramite varie trasformazioni. Di queste, quella più usualmente adottata dagli Autori americani ed anche nelle applicazioni idrauliche di cui sono venuto a conoscenza, consiste nella definizione di una nuova variabile Z dove $Z = f(R, S)$ detta funzione esito (performance function).

La variabile tempo delle (2) non verrà, nel seguito, più esplicitamente citata perché si è accertato che i valori che possono assumere le variabili aleatorie R e S sono quelli, e solo quelli, relativi a tutta la vita della realizzazione.

La (2) si scriverà ora come:

$$P_{\text{fail}} = P_r (Z < 0) = \int_{-\infty}^0 \text{PDF}(Z) dZ = \text{CDF}(Z) \quad (3)$$

Con i simboli PDF e CDF sono state indicate rispettivamente le funzioni densità di probabilità (probability density function) e la funzione distribuzione cumulativa di probabilità (cumulative density function).

Delle varie possibili definizioni della funzione esito noi adotteremo la:

$$Z = R - S \quad (4)$$

diversa da quella adottata da TANG & YEN (1972) per le fognature, ritenendo, la (4), più idonea ad una impostazione generale⁽²⁾.

⁽¹⁾ Infatti se il successo anziché dipendere solo da R e da S dipendesse da N grandezze X_i avremo:

$$P_{\text{fail}} = P_r [P(X_i) \in U \text{ almeno una volta in } (0, T)] \quad (2')$$

⁽²⁾ TANG & YEN, hanno definito la funzione esito tramite la

$$Z = \ln(R/S) \quad (4')$$

questa, pur portando ad una notevole semplificazione nei calcoli, trascura, a causa di necessarie approssimazioni, alcuni elementi che, in una trattazione più generale conviene invece tener presenti.

L'applicazione rigorosa dei metodi probabilistici richiederebbe la conoscenza delle distribuzioni statistiche di R ed S la qual cosa li renderebbe praticamente inutilizzabili.

Si aggira l'ostacolo tramite una approssimazione nota come Analisi del primo ordine (o metodo del secondo momento) che consente di prendere in esame e di elaborare non sulle distribuzioni statistiche di R ed S bensì sui loro valori medi e scarti quadratici medi, cioè su due soli valori. Dalla (4) risultano immediatamente:

$$\bar{Z} = \bar{R} - \bar{S} \quad (5)$$

ed:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2 \text{COV}(R, S) \quad (6)$$

dove con σ è stato indicato lo scarto quadratico medio e con $\text{COV}(R, S)$ la covarianza di R ed S .

La (6) è immediata dalla definizione di scarto quadratico medio.

Nell'ipotesi che la distribuzione statistica di R ed S non influisca sull'entità del rischio di insuccesso, cosa che risulta confermata, per i livelli di rischio dell'ordine di 10^{-3} dai lavori di ANG (1970), YEN & ANG (1971), TANG & YEN (1972), potremo per semplicità adottare una distribuzione tipo normale, la (3) e quindi in forma canonica, diventa:

$$P_{\text{fail}} = \text{CDF}\left(\frac{-\bar{Z}}{\sigma_Z}\right) = \text{CDF}\left(\frac{-\bar{R} + \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2 \text{COV}(R, S)}}\right) \quad (7)$$

l'entità \bar{Z}/σ_Z , inverso del coefficiente di variazione cioè dello scarto quadratico medio relativo, è chiamata indice di sicurezza.

Esplicitando S nella (7) avremo ancora:

$$S = R e^{\left[-(\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2 \text{COV}(R, S))^{1/2} \text{CDF}^{-1}(P_{\text{fail}})\right]} \quad (7')$$

Nella generalità dei casi sia R che S sono funzioni di variabili aleatorie X_i tramite delle espressioni; quest'ultime sono, a loro volta, quasi sempre gravate da incertezze circa la loro affidabilità e ciò aumenta le incertezze del problema.

Dunque se la R (e/o la S) hanno espressione:

$$R = F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (8)$$

avremo incertezze e nei valori di X_i da introdurre (infatti anziché introdurre nelle formule l'effettivo valore di X_i noi generalmente introduciamo nelle (8) un valore \hat{X}_i che è la stima del valore medio di X_i) e circa la attendibilità della (8) stessa; per cui ci converrà introdurre un coefficiente η e dei coefficienti v_i tutti a loro volta, ancora variabili aleatorie, correttivi della (8) e degli \hat{X}_i , rispettivamente; avremo dunque:

$$R = \eta_R F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (9)$$

per lo stesso motivo ciascun X_i può essere dato dalla:

$$X_i = v_i \hat{X}_i \quad (10)$$

dove \hat{X}_i è il valore che noi introduciamo nella (8) sulla base delle informazioni che possediamo e non l'effettivo valore che è appunto X_i . Il valore medio di \hat{X}_i sarà necessariamente uguale ad \bar{X}_i , cioè uguale al valore medio di X_i e il suo scarto quadratico medio sarà s_i .

Il valore medio di v_i dovrà necessariamente essere pari alla unità e il relativo scarto quadratico medio sarà ξ_i .

Lo scarto quadratico medio σ_i della variabile X_i sarà dunque dato dalla (3):

$$\sigma_i^2 \cong s_i^2 + (\bar{X}_i \xi_i)^2 \quad (11)$$

o, che è lo stesso, dalla:

$$\sigma_{r_i}^2 \cong s_{r_i}^2 + \xi_{r_i}^2 \quad (11')$$

Analogamente per le S . Dunque per applicare l'equazione (7) o la (7') ci occorrono i soli valori medi e scarti quadratici medi di R e S .

Alla luce di quanto visto sino ad ora, avremo quindi:

$$\bar{R} = \bar{\eta} F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i, \dots, \bar{X}_n) \quad (12)$$

come risulta dal confronto delle (9) e delle (10), ed ancora (4):

$$\sigma_R^2 \cong \bar{F}^2 \sigma_\eta^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{F}}^2 \sigma_i^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^n \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_h} \right)_{\bar{F}} \varrho_{ih} \sigma_i \sigma_h \quad (13)$$

Se, come spesso si verifica, le grandezze X_i ed X_h sono tra loro tutte statisticamente indipendenti si avrà $\varrho_{ih} = 0$ per cui la (13) si semplifica nella:

$$\sigma_R^2 \cong \bar{F}^2 \sigma_\eta^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{\bar{F}}^2 \sigma_i^2 \quad (13')$$

L'ultima quantità delle equazioni (7) e (7') che ora ci rimane da definire è $\text{COV}(R, S)$; per essa è valida la relazione (4):

$$\text{COV}(R, S) \cong \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right) \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial S} \right) \sigma_S^2 \quad (14)$$

Il soprassedio indica che il calcolo va effettuato per il valore medio di R ed S .

$$(3) \text{ Per definizione } \sigma_i^2 = \frac{\sum_{a=1}^{N_i} (v_{a,i} \hat{X}_{a,i} - \bar{v}_i \bar{\hat{X}}_i)^2}{N - 1}$$

sviluppando in serie di TAYLOR, con termine iniziale calcolato per il valore medio di X_i e tenendo conto che sono utili e il termine iniziale e quello alle derivate prime, avremo:

$$\sigma_i^2 \cong \frac{1}{2!} \frac{1}{N - 1} \left[\sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial^2 (v_{a,i} \hat{X}_{a,i} - \bar{v}_i \bar{\hat{X}}_i)^2}{\partial v_{a,i}^2} \right) \right] - (v_{a,i} - \bar{v}_i)^2 + \sum_{a=1}^N \left[\frac{\partial^2 (v_{a,i} \hat{X}_{a,i} - \bar{v}_i \bar{\hat{X}}_i)^2}{\partial X_i^2} \right] \\ \cdot (\hat{X}_{a,i} - \bar{\hat{X}}_i) = \bar{\hat{X}}_i \xi_i^2 + v_i^2$$

e tenendo ancora conto che $\bar{v}_i = 1$ segue la (11), che può ancora essere espressa dalla (11') se si dividono ambo i membri per $\bar{\hat{X}}_i^2$, si otterrà così:

$$\left(\frac{\sigma_i}{\bar{\hat{X}}_i} \right)^2 \cong \xi_i^2 + \left(\frac{s_i}{\bar{\hat{X}}_i} \right)^2$$

e quindi la (11') ricordando la definizione di scarto quadratico medio relativo.

(4) La (13) e la (14) si ottengono rispettivamente dalla definizione di σ_R e $\text{COV}(R, S)$ con procedimento del tutto analogo a quello della precedente nota (3).

Può in alcuni casi ancora accadere che i parametri X_i che definiscono le R (o le S) siano a loro volta funzioni di altri parametri tramite relazioni del tipo

$$X_i = M (Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_m) \quad (15)$$

ciò comporta ancora alcune incertezze e nei parametri Y_j e nel modello M . Indicheremo ancora con \hat{Y}_j , i valori stimati di Y_j che andremo ad introdurre nella (15) e con η_M il coefficiente che tenga conto degli errori del modello.

Sia Y_j che η_M possono essere ancora riguardati come variabili aleatorie e quindi si potrà scrivere

$$X_i = \eta_M M (Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_m) \quad (16)$$

ed

$$Y_j = \hat{Y}_j v_j \quad (17)$$

I valori medi di \hat{Y}_j e v_j saranno rispettivamente ancora uguali al valor medio di Y_j ed alla unità mentre gli scarti quadratici medi di Y_j e v_j sono s_j e ξ_j . Tra σ , s , ξ con indice j ed Y_j varranno ancora le stesse relazioni tra le omonime grandezze con indice i ed X_i cioè:

$$\sigma_i^2 \cong s_j^2 + (\bar{Y}_j \xi_j)^2 \quad (18)$$

che può essere anche espressa dalla:

$$\sigma_{rj}^2 \cong s_{rj}^2 + \xi_{rj}^2 \quad (18')$$

Si perviene quindi alla:

$$\bar{X}_i = \bar{\eta}_M M (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_j, \dots, \bar{Y}_m) \quad (19)$$

ed ancora alla:

$$\sigma_i^2 = \bar{M}^2 \sigma_{\eta_M}^2 + \bar{\eta}_M^2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial M}{\partial Y_j} \right)_M^2 \sigma_j^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{\substack{i=1 \\ k=1 \\ j \neq k}}^m \left(\frac{\partial^2 M}{\partial Y_j \partial Y_k} \right)_M \varrho_{jk} \sigma_j \sigma_k \quad (20)$$

Anche in tal caso nell'ipotesi che Y_j ed Y_k siano tra loro statisticamente indipendenti la (20) diventa:

$$\sigma_i^2 = \bar{M}^2 \sigma_{\eta_M}^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial M}{\partial Y_j} \right)_M^2 \sigma_j^2 \quad (20')$$

Nella (13) e nella (20) compaiono rispettivamente i coefficienti di correlazione ϱ_{ih} e ϱ_{jk} . La loro conoscenza comporta l'elaborazione diretta dei valori di X_i ed X_h nonché di Y_j ed Y_k e ciò renderebbe nuovamente inapplicabile il metodo nel caso che dette correlazioni non siano inesistenti cioè nel caso che tutte le grandezze X_i ed X_h (e Y_j ed Y_k) non siano tra loro statisticamente indipendenti.

Per l'applicazione del metodo è invece opportuno poter esprimere anche i coefficienti di correlazione in funzione dei valori medi e degli scarti quadratici medi di X_i ed X_h e di (Y_j ed Y_k). Ciò si ottiene ricordando che:

$$\varrho_{ih} = \frac{\text{COV} (X_i, X_h)}{\sigma_i \sigma_h} \quad (21)$$

e

$$\varrho_{jk} = \frac{\text{COV} (Y_j, Y_k)}{\sigma_j \sigma_k} \quad (21')$$

e che:

$$\text{COV} (X_i, X_h) \cong \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_h} \right)_i \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial \bar{X}_h}{\partial X_i} \right)_h \sigma_h^2 \quad (22)$$

e

$$\text{COV} (Y_j, Y_k) \cong \left(\frac{\partial \bar{Y}_j}{\partial Y_k} \right)_j \sigma_j^2 + \left(\frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial Y_j} \right)_k \sigma_k^2 \quad (22')$$

dal loro confronto segue che:

$$Q_{ih} \approx \frac{\left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{X}_h}\right)_i \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial \bar{X}_h}{\partial \bar{X}_i}\right)_h \sigma_h^2}{\sigma_i \sigma_h} \quad (23)$$

che equivale a:

$$Q_{ih} \approx \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{X}_h}\right)_i \frac{\sigma_i}{\sigma_h} + \left(\frac{\partial \bar{X}_h}{\partial \bar{X}_i}\right)_h \frac{\sigma_h}{\sigma_i} \quad (24)$$

ed analogamente

$$Q_{jk} \approx \left(\frac{\partial \bar{Y}_j}{\partial \bar{Y}_k}\right)_j \frac{\sigma_j}{\sigma_k} + \left(\frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial \bar{Y}_j}\right)_k \frac{\sigma_k}{\sigma_j} \quad (24')$$

Per l'applicazione ora delle (7) e delle (7') è necessario conoscere soltanto i valori medi e gli scarti quadratici medi delle varie grandezze in giuoco.

Il soprassegno alle derivate parziali dalle (22) alla (24') indica che i valori numerici sono calcolati per i valori medi delle variabili interessate.

2 - Possibilità di applicazioni

Un tale procedimento di calcolo può essere applicato alla quasi totalità dei progetti di opere idrauliche in quanto la condizione di applicabilità è che debba risponderci ad un confronto tra sollecitazioni (e richiesta di una certa prestazione) e la prestazione che l'opera stessa può dare.

Pertanto tale criterio è adatto alle opere idrauliche di trasporto:

- fognature;
- acquedotti (e civili ed industriali);
- collettori di bonifica;
- opere di trasporto per irrigazioni.

Il criterio è però anche suscettibile di applicazioni nelle progettazioni di impianti idroelettrici, di difese fluviali e nelle opere di idraulica sanitaria.

2.1 - APPLICAZIONE ALLE OPERE DI TRASPORTO.

Per tale gruppo di opere i simboli R (resistenza o prestazione) ed S (sollecitazione o richiesta) assumono rispettivamente — ovviamente — il significato di portata trasportabile Q_R e portata richiesta Q_S .

È evidente come una qualunque di tali opere vada in crisi al non verificarsi dell'evento

$$Q_S \leq Q_R \quad (25)$$

Analizziamo ora le varie opere idrauliche di trasporto al fine di evidenziare le possibilità di applicazione del metodo proposto.

2.1.1. - Fognature.

Il metodo probabilistico del primo ordine ha già trovato applicazione alle fognature sin dal 1972 ad opera di TANG ed YEN ai quali, successivamente si è aggiunto MAYS.

Questi Autori, come già indicato nella nota 2, hanno definito nei loro lavori una diversa « performance function » Z .

Q_S sarà la portata massima che perverrà al collettore fognante in seguito all'evento meteorico, pertanto

$$Q_S = \varphi i A \quad (26)$$

dove φ è il coefficiente di pioggia (esso è dato dal prodotto del coefficiente di ritardo e del coefficiente di assorbimento), i è l'intensità di pioggia avente una durata eguale a quella di corrivazione relativa al collettore ed A è l'area drenata.

Q_R sarà invece la massima portata che quel collettore può trasportare ed avrà espressione

$$Q_R = \Omega K R^{2/3} I^{1/2} \quad (27)$$

dove Ω è l'area della sezione bagnata, R il raggio idraulico, K il coefficiente della formula di Manning ed I la cadente piezometrica.

La (27) è la formula di Manning, evidentemente si potrebbero adottare anche formule diverse (5).

Nell'ipotesi che la tubazione sia a sezione circolare e che il deflusso avvenga a sezione piena, ma non in pressione, la (27) si potrà scrivere:

$$Q_R = \pi K R^{8/3} I^{1/2} \quad (27')$$

Applicando l'analisi del primo ordine e ritenendo nulli e COV (R, S) nonché i ϱ_{ih} , qualunque siano le varie combinazioni di i ed h ($i \neq h$) (in effetti si dovrebbe tener conto delle correlazioni tra Ω ed R , R e K ed Ω e K , tuttavia queste si annullano nell'ipotesi che ci si possa ricondurre alla (27') che, inoltre, si possono ritenere nulli i vari ϱ_{jk} ($j \neq k$), avremo:

$$\bar{Q}_S = \bar{\eta}_S \bar{\varphi} \bar{i} \bar{A} \quad (28)$$

$$\bar{Q}_R = 4\pi \bar{\eta}_R \bar{K} \bar{I}^{1/2} \bar{R}^{8/3} \quad (29)$$

$$\sigma_S^2 = \sigma_{\eta_S}^2 \bar{Q}_S^2 + \bar{\eta}_S^2 [(\bar{i} \bar{A} \sigma_\varphi)^2 + (\bar{\varphi} \bar{A} \sigma_i)^2 + (\bar{\varphi} \bar{i} \sigma_A)^2] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 = \sigma_{\eta_R}^2 \bar{Q}_R^2 + \eta_R \left[(4\pi \bar{R}^{8/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_K)^2 + \left(\frac{32\pi}{3} \bar{K} \bar{R}^{5/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_R \right)^2 + \right. \\ \left. + (2\pi \bar{R}^{8/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_I)^2 \right] \quad (31) \end{aligned}$$

La conoscenza dei valori medi e degli scarti quadratici medi di η_S , η_R , φ , i , A , K , I , R risolve completamente il problema permettendo l'applicazione della (7) o/e della (7').

2.1.2 - Acquedotti.

Non risultano allo scrivente che sino ad oggi siano state proposte altre applicazioni tipiche delle costruzioni idrauliche di detto metodo diverse da quella su accennata e quindi nemmeno per gli acquedotti.

Ci limitiamo nella presente esposizione ai soli acquedotti urbani a scopo cioè idropotabile. Per questi la S (sollecitazione) è la richiesta di acqua da parte di un centro urbano che pertanto è esprimibile tramite la nota relazione:

$$Q_S = \frac{\alpha N q}{86.400} \quad (32)$$

dove α è un coefficiente che tiene conto delle punte di portata rispetto alla portata media annua, N è il massimo numero degli abitanti da servire nel periodo di esercizio dell'acquedotto e q è la dotazione idrica pro-capite.

La prestazione Q_R che può fornire l'acquedotto (o meglio la sua adduttrice) è data dalla:

$$Q_R = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g} D^{2.5} \lambda^{-1/2} I^{1/2} \quad (33)$$

dove: D è il diametro della tubazione, λ il coefficiente di resistenza, I la cadente piezometrica.

Ammettendo pure che sia ancora COV (R, S) = 0, per gli acquedotti di certo non si annullano i coefficienti di correlazione di cui alla (24) ed, a priori, neanche quelli di cui alla (24'); si hanno infatti relazioni tra le variabili che definiscono Q_R e Q_S .

La dotazione idrica pro-capite dipende notoriamente dalla popolazione N e dipendenza analoga esiste per α . Inoltre sia N che q dipendono da modelli [del tipo degli M della (16)] tramite alcune variabili del tipo delle Y_j della stessa (16).

(5) Nel loro primo lavoro TANG ed YEN adottarono per Q_R la formula di Darcy-Weisbach nella forma:

$$Q_R = \frac{\pi}{4} \sqrt{r g} \sqrt{\frac{I}{\lambda}} D^{2.5}$$

Ad esempio q , secondo il VENTURI (1965), ha espressione del tipo (6):

$$q = u l_n N + V \quad (34)$$

dove u e V sono due coefficienti da valutarsi in base a precedenti esperienze. Per N esistono vari modelli, la scelta del quale è condizionata dai dati a disposizione circa la popolazione presente, nel centro considerato, in passato e da ipotesi di carattere socio-economiche.

Per semplicità qui faremo riferimento solo ai metodi di previsione matematici, tralasciando modelli più complessi, quali, ad esempio, quello delle componenti (7).

Qui consideriamo due ipotesi:

— o che sia applicabile la:

$$N = N_0 (1 + \tau)^n$$

dove N_0 è la popolazione presente alla data del più antico censimento, τ l'incremento percentuale medio annuo della popolazione ed n il numero degli anni, misurato a partire dall'anno nel quale la popolazione era di N_0 e sino al quale deve rimanere in servizio l'acquedotto;

— o che sia applicabile la

$$N = \frac{a}{1 + b e^{-c n}} \quad (35')$$

dove a , b e c sono tre costanti definite dal sistema:

$$N_0 = \frac{a}{1 + b} ; N_f = \frac{a}{2} ; b = e^{+c n_f} \quad (35'')$$

nelle quali N_0 ed n hanno lo stesso significato già visto per la (35); N_f ed n_f sono rispettivamente il numero di abitanti ed il numero progressivo del relativo anno, contato a partire dall'anno di N_0 , in cui la curva della popolazione presenta un flesso.

Quindi applicando l'analisi del primo ordine cioè le (12), (13), (19), (20), (24) e (24') avremo:

$$\bar{Q}_S = \bar{\eta}_S \frac{\bar{a} \bar{N} \bar{\eta}_q (\bar{U} l_n \bar{N} + \bar{V})}{86.400} \quad (36)$$

dove \bar{N} varrà, a seconda del modello che si utilizza o:

oppure

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \bar{\eta}_N N_0 (1 + \bar{\tau})^n \\ \bar{N} &= \bar{\eta}_N \frac{\bar{a}}{1 + \bar{b} e^{-\bar{c} n}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\bar{Q}_R = \bar{\eta}_R \frac{\pi}{4} \sqrt{2g} \bar{D}^{2.5} \bar{\lambda}^{-1/2} \bar{I}^{1/2} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \bar{Q}_S^2 \sigma_{\eta_S}^2 + \bar{\eta}_S^2 \frac{1}{86.400} [(\bar{N} \bar{q} \sigma_a)^2 + (\bar{a} \bar{q} \sigma_N)^2 + (\bar{a} \bar{N} \sigma_q)^2] + \frac{\eta_S^2}{86.400} \left\{ \left[\bar{q} \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{N}} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{N} \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{q}} \right) \right] \sigma_a^2 + \left[\bar{q} \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{a}} \right) + \bar{a} \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{q}} \right) \right] \sigma_N^2 + \left[\bar{N} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{a}} \right) + \bar{a} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{N}} \right) \right] \sigma_q^2 \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

dove il soprassegno alle derivate parziali indica che esse vanno calcolate per i valori medi di α , N , q , sulla base del legame tra loro esistente.

(6) Il VENTURI nella sua Nota in effetti si esprime in termini di logaritmi decimali; per la nostra comodità abbiamo trasformato la relazione (34) in logaritmi neperiani.

(7) Su tale argomento vedasi, p. es., Ornello VITALI: La crisi italiana; il problema della popolazione. Franco Angeli Editore (1976).

I valori di σ_q e σ_N ci sono dati per le σ_q dalla:

$$\sigma_q^2 = \bar{q}^2 \bar{\sigma}_{\eta_q}^2 + \bar{\eta}_q^2 \left[2 (l_n \bar{N}) \sigma_u^2 + \frac{\bar{u}}{\bar{N}} \sigma_N^2 + \sigma_V^2 \right] \quad (40)$$

e, per le σ_N , a seconda del modello adottato, dalla:

$$\sigma_N^2 = \bar{N} \sigma_{\eta_N}^2 + \bar{\eta}_N^2 \bar{N}_0 n (1 + \bar{\tau})^{n-1} \sigma_\tau^2$$

oppure dalla:

$$\sigma_N^2 = \bar{N}^2 \sigma_{\eta_N}^2 + \bar{\eta}_N^2 \left[\left(\frac{\sigma_a}{1 + \bar{b} e^{-\bar{c}n}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{a} e^{-\bar{c}n} \sigma_b}{(1 + \bar{b} e^{-\bar{c}n})^2} \right)^2 + \left(\frac{\bar{a} \bar{b} n e^{-\bar{c}n} \sigma_c}{(1 + \bar{b} e^{-\bar{c}n})^2} \right)^2 \right] \quad (41)$$

e, quindi:

$$\sigma_R^2 = \bar{Q}_R^2 \sigma_{\eta_R}^2 + \bar{\eta}_R^2 \left[\frac{25 \pi^2 g \bar{D}^3 \bar{I}}{32 \bar{\lambda}} \sigma_D^2 + \frac{9 \pi g \bar{D}^5 \bar{\lambda} \bar{I}}{32} \sigma_\lambda^2 + \frac{\pi g \bar{D}^5 \sigma_I^2}{32 \bar{\lambda} \bar{I}} \right] + \quad (42)$$

$$+ \bar{\eta}_R^2 \frac{5 \pi g \bar{D}^3 \bar{\lambda} \bar{I}}{128} \left[\left(\frac{\delta \bar{D}}{\delta \bar{\lambda}} \right) \sigma_D^2 + \left(\frac{\delta \bar{\lambda}}{\delta \bar{D}} \right) \sigma_\lambda^2 \right]$$

dove il soprassetto indica ancora che il calcolo va eseguito per il valore medio.

Le equazioni dal (36) al (42) risolvono il problema degli acquedotti previa quindi conoscenza dei valori medi e degli scarti quadratici medi di η_S , η_q , η_R , u , v , D , λ , I nonché, a seconda del modello scelto per N , ed oltre ai dati di tutti i censimenti di popolazione e di η_N , anche di τ e a , b e c .

2.1.3 - Collettori di bonifica (a scolo naturale).

Per le bonifiche la sollecitazione è data dalla massima portata che il collettore è chiamato a smaltire a seguito della pioggia di intensità H e durata T_p .

Detta portata massima è esprimibile tramite la

$$Q_S = u A \quad (43)$$

dove A è l'area della superficie bonificata mentre u è il coefficiente udometrico.

La massima prestazione Q_R sarà ancora esprimibile tramite la formula di Manning (formula 27).

L'analisi del primo ordine, assumendo ancora che $COV(R, S) = 0$, porta in questo caso ai seguenti risultati:

$$\bar{Q}_S = \bar{\eta}_S \bar{u} \bar{A} \quad (44)$$

$$\bar{Q}_R = \bar{\eta}_R \bar{\Omega} \bar{K} \bar{R}^{2/3} \bar{I}^{1/2} \quad (45)$$

$$\sigma_S^2 = \bar{Q}_S^2 \sigma_{\eta_S}^2 + \bar{\eta}_S^2 \left[(\bar{A} \sigma_u)^2 + (\bar{u} \sigma_A)^2 \right] + \bar{\eta}_S^2 \left[\left(\frac{\delta u}{\delta A} \right) \sigma_u^2 + \left(\frac{\delta A}{\delta u} \right) \sigma_A^2 \right] \quad (46)$$

e

$$\sigma_R^2 = \bar{Q}_R^2 \sigma_{\eta_R}^2 + \bar{\eta}_R^2 \left[(\bar{K} \bar{R}^{2/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_\Omega)^2 + (\bar{\Omega} \bar{R}^{2/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_K)^2 + \left(\frac{2}{3} \bar{\Omega} \bar{K} \bar{R}^{-1/3} \bar{I}^{1/2} \sigma_R \right)^2 + \right. \quad (47)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \bar{\Omega} \bar{K} \bar{R}^{2/3} \bar{I}^{-1/2} \sigma_I \right)^2 \right] + \bar{\eta}_R^2 \bar{R}^{2/3} \bar{I}^{1/2} \left[\left(\frac{\delta \bar{\Omega}}{\delta \bar{R}} \right) \sigma_\Omega^2 + \left(\frac{\delta \bar{R}}{\delta \bar{\Omega}} \right) \sigma_\Omega^2 \right]$$

Con riguardo alla (45) e (46), tenendo presente che:

$$u = 0,1157 \frac{\alpha \varphi H}{T_p + T_c} \quad (48)$$

nella quale con α è indicato il coefficiente di piena, con φ il coefficiente di scolo, con T_c il tempo di corrvazione a sua volta espresso dalla (Ruggiero):

$$T_c = 0,24 \sqrt[3]{A L} \quad (49)$$

avremo che:

$$\bar{u} = \bar{\eta}_u 0,1157 \frac{\bar{\alpha} \bar{\varphi} \bar{H}}{\bar{T}_p + \bar{T}_c} \quad (50)$$

inoltre σ_u si ottiene applicando alla (48) la (20); qui per brevità, si omette di trascriverne l'espressione. Sempre dalla (48) e (49) si ottengono le espressioni delle derivate parziali della (46) che, come indica il soprassegno, vanno calcolate per i valori medi di u e di A .

Le derivate parziali che compaiono nella (47) dipendono, invece, dalla geometria della sezione.

2.1.4 - Irrigazioni.

La sollecitazione, nel caso di irrigazioni, sarà la massima richiesta di acqua da parte delle colture, notoriamente questa è espressa dalla:

$$Q_s = 24 \frac{q R}{O} A \quad (51)$$

dove q è il coefficiente udometrico, R la ruota otturna, O le ore di distribuzione dell'acqua ed A l'estensione del terreno da irrigare.

La prestazione che l'impianto irriguo è in grado di offrire sarà ora espressa, a seconda che trattasi di impianto in pressione o a pelo libero, rispettivamente dalla (33) o dalla (27).

Applicando l'analisi del primo ordine e tenendo ancora presente che $\text{COV}(R, S) = 0$ si perviene alle:

$$\bar{Q}_s = 24 \bar{\eta}_s \frac{\bar{q} \bar{R}}{\bar{O}} \bar{A} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 = & \bar{Q}_s^2 \sigma_{\eta_s}^2 + \bar{\eta}_s^2 \left[\left(24 \frac{\bar{R} \bar{A}}{\bar{O}} \sigma_q \right)^2 + \left(24 \frac{\bar{q} \bar{A}}{\bar{O}} \sigma_R \right)^2 + \left(24 \frac{\bar{R} \bar{A}}{\bar{O}^2} \sigma_o \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(24 \frac{\bar{R} \bar{q}}{\bar{O}} \sigma_A \right)^2 \right] - \bar{\eta}_s^2 24 \frac{\bar{A} \bar{R}}{\bar{O}^2} \left[\left(\frac{\delta \bar{R}}{\delta \bar{O}} \right) \sigma_R^2 + \left(\frac{\delta \bar{O}}{\delta \bar{R}} \right) \sigma_o^2 \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Le derivate parziali che compaiono in quest'ultima espressione devono essere dedotte in base al tipo di coltura in atto in quanto sia R che O dipendono proprio dalla coltura.

Per quanto riguarda i valori di \bar{Q}_R e σ_R si rimanda, sempre a seconda che si tratti di impianti a pressione o a pelo libero, rispettivamente alle (38) e (42) o alle (45) ed a quanto espresso per σ_R nei riguardi dei canali di bonifica.

2.2 - APPLICAZIONE ALLE ALTRE OPERE IDRAULICHE.

In precedenza si è accennato alla possibilità di applicare il metodo probabilistico ad altre opere idrauliche, in particolare la sollecitazione per gli impianti idroelettrici sarà costituita dalla richiesta di energia e la resistenza dalle prestazioni dell'impianto.

Nel caso di opere di difesa fluviale la sollecitazione sarà la portata di massima piena del corso d'acqua stesso e la R sarà la resistenza che la difesa può offrire.

Nelle opere di ingegneria sanitaria, per esempio negli impianti di depurazione delle acque fognanti, la sollecitazione sarà il carico di materiale organico del liquame e la prestazione sarà la capacità di depurazione dell'impianto.

3 - Osservazioni finali e conclusioni

I tradizionali calcoli di progetto e di verifica, generalmente, si basano sul confronto di \bar{S} ed \bar{R} imponendo che il loro rapporto (\bar{S}/\bar{R}) sia maggiore, al più uguale, ad un valore prefissato detto coefficiente di sicurezza.

Su un piano cartesiano, dove sulle ascisse sono S ed R e sulle ordinate le rispettive probabilità avremo le due curve PDF (S) e PDF (R) con la classica forma a campana.

I tradizionali calcoli ci assicurano, quindi, che tra i vertici delle due PDF sussista una certa distanza.

Questo criterio ha una sua validità solo se le curve di distribuzione statistiche sono molto raccolte intorno al loro valore medio, cioè sono curve del tipo della (1) e della (3) di fig. 1 (rispettivamente per le S e le R).

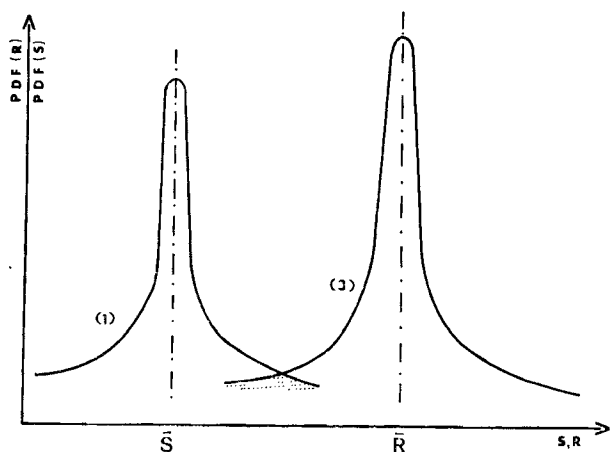


FIG. 1-a.

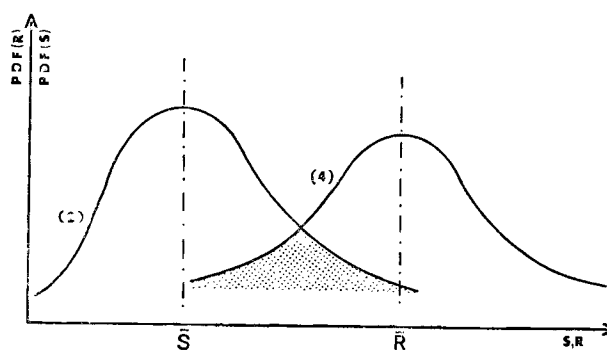


FIG. 1-b.

Infatti la probabilità che si verifichi una crisi, che corrisponde ad $S > R$, è data dall'area dei punti comuni di R e di S . Ora l'estensione dell'area di tali punti comuni è funzione e della distanza di \bar{R} da \bar{S} e della forma delle stesse curve a campana, tuttavia se esse sono molto strette (intorno al loro valor medio) la distanza di \bar{R} da \bar{S} può, da sola, essere sufficientemente indicativa e ciò giustifica i tradizionali procedimenti.

Tuttavia non si verifica in generale, per le opere idrauliche, che le curve PDF siano del tipo (1) o (3) anzi essendo spesso i calcoli delle opere idrauliche gravate da molte incertezze le PDF si presentano, perlopiù, con campane molto larghe [del tipo (2) o (4) di fig. 1]. Il metodo testé proposto, cioè dell'analisi del primo ordine, permette, in prima approssimazione, e cioè solo tramite gli scarti quadratici medi, di tenere anche conto della forma della campana.

Questo ci assicura una valutazione molto più soddisfacente che il solo confronto fra i valori medi di R ed S .

Ci è consentito inoltre, quando di un'opera si possono proporre varie soluzioni alternative, di poter compiere un confronto obiettivo tra i vari progetti.

BIBLIOGRAFIA

- ANG & CORNELL: *Reliability bases of structural safety and design*. A.S.C.E. - Jr. Structural Div. 1974.
- ANG: *Structural risk analysis and reliability-based design*. A.S.C.E. - Jr. Structural Div. 1973.
- ANG & AMIN: *Reliability of structures and structural systems*. A.S.C.E. - Jr. Engineering Mechanics Div. 1968.
- AUGUSTI: *Metodi probabilistici nell'ingegneria strutturale*. Università di Firenze - Note e pubblicazioni di Ingegneria strutturale - Nov. 1974.
- BENJAMIN & CORNELL: *Probability, statistics and decision for civil engineering*. Mc. Graw Hill Book N.Y. - 1970.
- BERNIER: *Les méthodes bayésiennes en Hydrologie statistique*. International Hydrology symposium - Fort Collins - Sett. 1967.
- CORNELL: *First order analysis of model parameter uncertainty*. International Symposium en uncertainties in Hydrologic and Water resource systems - Tucson, Arizona, 1972.
- CORNELL: *Secondo-Momento structural code format*. 50th anniversary symposium, Deutscheher Betonverein - Berlin 1973.
- CORNELL: *Some comments on second-moment codes and on Bayesian methods*. US-Japan seminar on reliability approach in structural engineering - Tokio, maggio 1974.
- DAVIS, KISIEL & DUCKSTEIN: *Bayesian decision theory applied to design in Hydrology* Water Resources research - Febbraio 1972.
- DAVIS & DVORANCHIK: *Evaluation of the worth of additional data* Water resources research. Agosto 1974.
- DE FINETTI: *Teoria delle probabilità*. Einaudi, 1970.
- HOWARD: *Decision analysis: applied decision theory*. Fourth international conference of operations research. 1966.
- KISIEL: *Stochastic hydraulics in relation to hydrology and decision theory*. Stochastic Hydraulics, Ist. Intern. Symp on Stochastic Hydraulics. 1871 pp. 710-728
- MAYS, L.W.; YEN, B.C. and TANG, W.H.: *Worth of Data for Optimal Design of Storm Sewers*. Proceedings, International Association for Hydraulic Research. Brasil, 1975.
- SAVAGE: *The foundations of statistics*. Wiley N. Y., 1954.
- TANG, W.H. & YEN, B.C.: *Hydrologic and Hydraulic design under uncertainties*. Int. Symp. Hydrologic and Water resource systems-University of Arizona, Tucson 1972.
- VENTURI: *Dotazione idrica pro-capite. Previsioni demografiche 2° conv. naz. aziende acquedottistiche municipalizzate*. Sorrento, 1965.
- YEN & ANG: *Risk analysis in design of Hydraulic projects*. « Stochastic Hydraulics ». University of Pittsburg, 1971.
- YEN: *Risk in Hydrologic design of engineering projects*. A.S.C.E. - Jr. Hydraulics Div. 1970.
- YEN, B.C.; TANG, W.H. and MAYS, L.W.: *Design of Storm Sewers Using the Rational Method*. Part I. Water and Sewage Works, Vol. 121, n. 10, ottobre 1974, pp. 92-96.
- YEN, B.C.; TANG, W.H. and MAYS, L.W.: *Design of Storm Sewers Using the Rational Method*. Part II. Water and Sewage Works, Vol. 121, n. 11, Novembre 1974, pp. 84-85.
- YEN, B.C. and TANG, W.H.: *Risk-Safety Factor Relation for Storm Sewer-Design*. « Journal of Environmental Engineering ». A.S.C.E., Vol. 102, EE2, April, 1976.