

GIORGETTI G. - MANTICA I. - RIBIGHINI G.

**RISOLUZIONE DEI TELAI MULTIPLI (PIANI, SPAZIALI
E AD ASTE INCLINATE) TRAMITE UN'ANALISI
TOPOLOGICA TIPICA DELLE RETI IDRAULICHE**

ESTRATTO DAL *GIORNALE DEL GENIO CIVILE*

Fascicolo 1° - 2° - 3° - Gennaio - Febbraio - Marzo 1984

RISOLUZIONE DEI TELAI MULTIPLI (PIANI, SPAZIALI E AD ASTE INCLINATE) TRAMITE UN'ANALISI TOPOLOGICA TIPICA DELLE RETI IDRAULICHE

G. GIORGETTI ⁽¹⁾ - I. MANTICA ⁽²⁾ - G. RIBIGHINI ⁽³⁾

SOMMARIO: Gli A.A. adattano un ormai ben noto metodo per la verifica delle reti idrauliche alla risoluzione dei telai multipli partendo dalla considerazione che la prassi ingegneristica precedente l'avvento degli elaboratori elettronici, constava, per entrambi i problemi, di metodologie analoghe.

Si ottiene così un metodo che ha il pregio della generalità, ma, di contro, il difetto di richiedere tempi di calcolo relativamente elevati.

E' riportato inoltre un esempio numerico relativo ad un telaio piano ad aste inclinate.

RÉSOLUTION DES CHÂSSIS MULTIPLES (PLANS, DANS L'ESPACE ET AVEC LES BRANCHES INCLINÉES) A TRAVERS UNE ANALYSE TOPOLOGIQUE TYPIQUE DES RÉSEUX HYDRAULIQUES

Résumé: Les A.A. adaptent une méthode, désormais bien connue pour vérifier les réseaux hydraulique, à la résolution des chassis multiples en prenant comme point de départ l'idée que la pratique de l'ingenierie qui précédait l'emploi des élaborateurs elettroniques, comprenait, pour les deux problèmes, des méthodologies analogues.

Ils obtiennent une méthode qui a l'avantage d'être général mais qui, par contre, a le défaut d'exiger des temps de calcul relativement élevés.

Ils fournissent un exemple numérique relatif à un chassis plat et avec des branches inclinées.

RISOLUTION OF THE MULTIPLE FRAMES (PLANES, SPATIAL AND WITH INCLINDE BEAMS) THROUGH A TOPOLOGICAL ANALYSIS, TYPICAL OF THE PIPE NETWORK.

Summary: The A.A. apt a well famous method for the verify of the pipe network to the risolution of the multiple frames from the consideration that the ingeneeringpraxis preceeding the introduction of the computers consisted for both problems, of analogue methods.

They obtain a method that has virtue to be general but on the contrary, the difect to require relatively eveled calculation-times.

They report a numeric example relative to a plan frames with inclined beams.

LÖSUNG VIELFACHER CHASSIS (FLÄCHEN, RÄUME UND BEI SCHRÄGEN STÄBEN) DURCH EINE TOPOLOGISCHE UNTERSUCHUNG TYPISCH BEI DEN HYDRAULISCHEN NETZEN.

Zusammenfassung: Die A.A. gebrauchen nunmehr eine bekannte Methode zur Überprüfung der hydraulischen Netze zur Lösung veilfacher Chassis und gehen von der Betrachtung aus, dass das übliche Verfahren der Ingenieure, vor dem Aufkommen der elektronischen Ausarbeiter, für beide Probleme, aus analoger Methodologie bestand.

Sie erzielen eine Methode, die den Allgemeinwert hat, aber eine relativ hohe Rechnungszeit benötigt. Sie bringen ein numerisches Beispiel bezüglich auf ein flaches Chassis mit schrägen Stäben.

⁽¹⁾ GIORGETTI dr. ing. GIORGIO - Libero professionista.

⁽²⁾ MANTICA prof. ing. IGNAZIO - Stabilizzato di Costruzioni Idrauliche nell'Università di Ancona.

⁽³⁾ RIBIGHINI dr. GIUSEPPA - Ricercatore di ruolo presso l'Istituto di Informatica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Ancona.

1 - Premessa

Sino a non molti anni or sono la tradizione ingegneristica soleva affrontare il problema della risoluzione di sistemi di numerose equazioni in altrettante incognite con il metodo di Hardy Cross.

In particolare detto metodo veniva utilizzato e per la soluzione di telai strutturali multipli e per la soluzione di reti acquedottistiche ad anello. Da alcuni anni, grazie al sempre più frequente ricorso agli elaboratori elettronici, sono stati messi a punto metodi matematici diversi, più adatti al mezzo disponibile, e per i telai multipli (si veda bibliografia) e per le reti acquedottistiche. Con riferimento a tale ultima applicazione si vedano i lavori di KEVASAN e CHANDRASHEKAR (1963 e 1967), di CHANDRASHEKAR e STEWART (1975), di LAM e WOLLA (1972), di WOOD e CHARLES (1972) ripresi poi da CURTO, CUSIMANO e NOBILI (1976) e successivamente da due degli autori della presente nota: MANTICA e RIBIGHINI (1979). Questi ultimi sono tutti basati sulla identificazione geometrica della rete mediante la sua sintesi in grafo orientato.

Si è inoltre constatato come il metodo in parola, nonostante la non linearità delle equazioni per le reti acquedottistiche, permetta soluzioni di sistemi anche molto grandi e con tempi abbastanza contenuti sebbene sia da rilevare che, proprio a causa della detta non linearità, il metodo può, a volte, non convergere.

Sulla base di dette esperienze è sorta l'idea di applicarlo anche ai telai multipli per i quali invece non sussiste la precedente limitazione essendo, nel caso specifico, le equazioni lineari.

2 - Simbologia ed equazioni

Indichiamo con R la matrice quadrata del quarto ordine della rigidezza di una trave (fig. 1) definita dalla:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{4 E J}{l} & -\frac{6 E J}{l^2} & \frac{2 E J}{l} & \frac{6 E J}{l^2} \\ -\frac{6 E J}{l^2} & \frac{12 E J}{l^3} & -\frac{6 E J}{l^2} & \frac{12 E J}{l^3} \\ \frac{2 E J}{l} & -\frac{6 E J}{l^2} & \frac{4 E J}{l} & \frac{6 E J}{l^2} \\ \frac{6 E J}{l^2} & -\frac{12 E J}{l^3} & \frac{6 E J}{l^2} & \frac{12 E J}{l^3} \end{vmatrix}$$

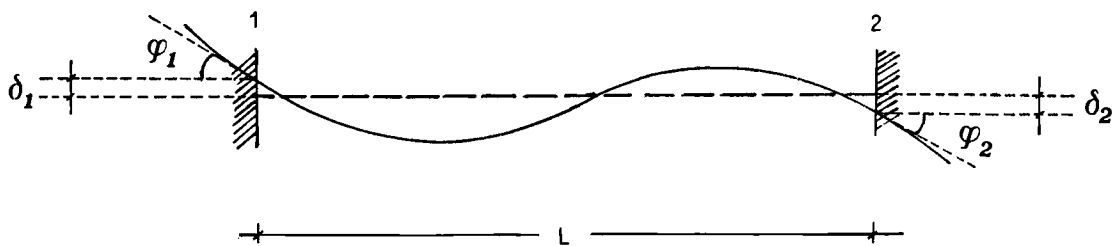


FIG. 1.

con S un vettore colonna che contenga le quattro sollecitazioni

$$S = \begin{vmatrix} M1 \\ T1 \\ M2 \\ T2 \end{vmatrix}$$

prodotte dal vettore spostamento η di cui nel seguito:

— con S_0 un vettore colonna di quattro elementi, analogo al precedente, ma riferito alle reazioni di incastro perfetto, la cui scrittura completa è

$$S_0 = \begin{Bmatrix} \text{MIP1} \\ \text{TIP1} \\ \text{MIP2} \\ \text{TIP2} \end{Bmatrix}$$

— con η un vettore colonna ancora di quattro elementi contenente rotazioni e cedimenti $\varphi_1, \delta_1, \varphi_2, \delta_2$ imposti alle estremità della trave di rigidezza R .

Si è sino ad ora, e poi nel seguito, indicato con 1 l'estremità inferiore (se trattasi di asta verticale) o sinistra (se trattasi di asta orizzontale) della trave ed ovviamente con 2 l'estremità opposta, mentre ovvio è il significato dei simboli $E, J, l, M, T, \delta, \varphi$ peraltro, ove possibile, indicati nella figura 1.

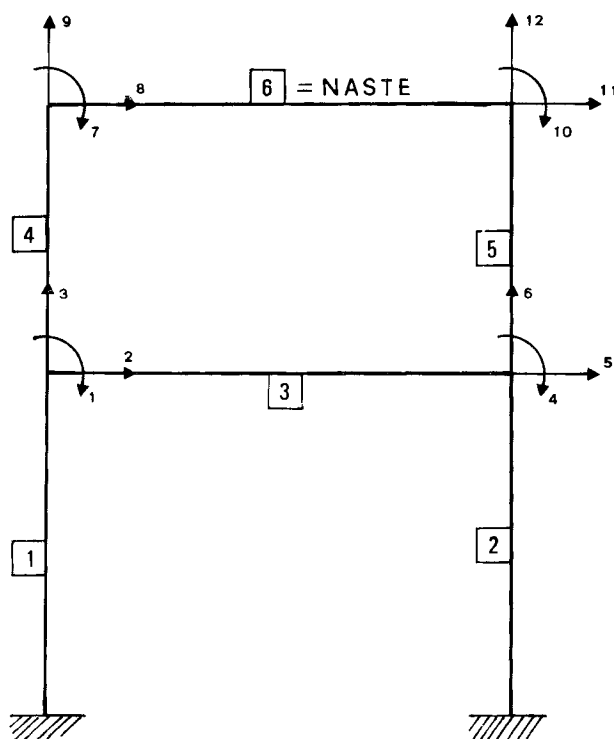


FIG. 2.

Con riferimento poi al telaio di fig. 2 si è proceduto a due distinte numerazioni:

- una prima delle singole aste con numero progressivo da 1 a NASTE;
- una seconda delle incognite nei nodi con numerazione progressiva da 1 a NINC, avendo l'avvertenza di numerare, per lo stesso nodo, dapprima i momenti, poi la componente orizzontale degli sforzi, e quindi quella verticale.

Si sono quindi definite le matrici di tipo topologico:

$A1M$ di ordine $(NINC \times NASTE)$ il cui generico elemento $A1M(i, j)$ sarà nullo se l'asta j con la sua estremità 1 non dà contributi al momento nel nodo i , altrimenti varrà l'unità positiva;

$A1T$ di ordine identico alla precedente ma il cui generico elemento sarà nullo se l'estremità 1 dell'asta j non contribuisce direttamente al taglio nell'orizzontamento i ;

ed analogamente $A2M$ ed $A2T$ per le estremità 2 delle aste.

Pertanto con riferimento alla fig. 2, le dette quattro matrici sono quelle della tabella I.

Si introducono ancora i seguenti vettori di ordine NASTE:

$M1$ contenente il momento nella sezione 1 dell'asta generica j -esima;

$T1$ contenente il taglio nella sezione 1 dell'asta generica j -esima;

analogaente $M2$ e $T2$ per le estremità 2.

TABELLA I

aste inco.	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	0	0

(A1T)

aste inco.	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

(A1M)

aste inco.	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0

(A2T)

aste inco.	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

(A2M)

Infine si introduce una nuova matrice di rigidezza \mathbf{R} , tridimensionale di ordine $4 \times 4 \times \text{NASTE}$ che riunisce in sé le varie matrici R già definite per le singole aste.

Possiamo allora generalizzare la nota scrittura algebrica

$$S = S_0 + R \eta \quad (1)$$

valida per una singola trave, nella nuova scrittura

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Theta} \quad (2)$$

dove:

\mathbf{S} ed \mathbf{S}_0 sono due matrici ($4 \times \text{NASTE}$) relative, la prima, alla sollecitazione prodotta dalla matrice della deformazione di cui più avanti, e la seconda relativa alla reazione di incastro perfetto, delle quali la prima riga contiene i valori di M_1 relativi alle varie aste, la seconda quelli di T_1 , la terza quelli di M_2 , la quarta quelli di T_2 , con ovvio simbolismo.

A è una matrice di dimensioni ($\text{NIC} \times \text{NASTE} \times 4$) ottenuta assemblando, come indicato nella fig. 3, le quattro matrici A_{1M} , A_{1T} , A_{2M} , A_{2T} ;

θ è un vettore di dimensioni NINC contenente le deformazioni del sistema organizzato come segue:

— da 1 a $\text{NN} = (\text{NNODI} - \text{NNODF})$ (dove NNODI ed NNODF sono rispettivamente il numero totale dei nodi ed il numero dei nodi vincolati) la rotazione dei nodi nell'ordine di numerazione dei nodi stessi;

— e da $\text{NN} + 1$ sino a NINC le traslazioni degli orizzontamenti.

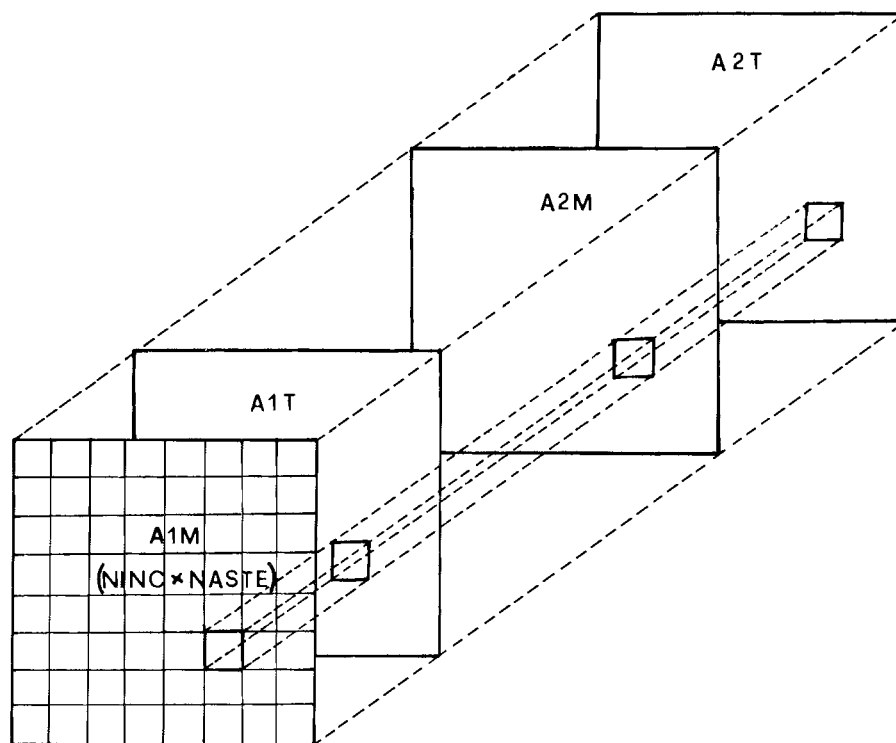


FIG. 3.

Il generico elemento $\mathbf{S}(k, j)$ della (2), che di fatto sintetizza prodotti di matrici tridimensionali (per i quali non sussistono univoche definizioni), è espresso in termini algebrici elementari dalla:

$$\mathbf{S}(k, j) = \sum_{h=1}^M \left\{ r(k, h, j) \cdot \sum_{i=1}^{\text{NINC}} a(i, j, h) \cdot \theta(i) \right\} + \mathbf{S}_0(k, j) \quad (2')$$

La (2) quindi esprime le reazioni d'estremità di tutte le aste dovute alle deformazioni θ .

In termini matriciali meno compatti, ma indubbiamente più classici, la (2) può esplicitarsi nel sistema matriciale:

$$\begin{aligned} M_1 &= (R_1 \cdot A_{1M}^T + R_2 \cdot A_{1T}^T + R_3 \cdot A_{2M}^T + R_4 \cdot A_{2T}^T) \theta + \text{MIP1} \\ T_1 &= (R_5 \cdot A_{1M}^T + R_6 \cdot A_{1T}^T + R_7 \cdot A_{2M}^T + R_8 \cdot A_{2T}^T) \theta + \text{TIP1} \\ M_2 &= (R_9 \cdot A_{1M}^T + R_{10} \cdot A_{1T}^T + R_{11} \cdot A_{2M}^T + R_{12} \cdot A_{2T}^T) \theta + \text{MIP2} \\ T_2 &= (R_{13} \cdot A_{1M}^T + R_{14} \cdot A_{1T}^T + R_{15} \cdot A_{2M}^T + R_{16} \cdot A_{2T}^T) \theta + \text{TIP2} \end{aligned} \quad (2'')$$

dove:

l'apice T indica la matrice trasposta;

M_1, M_2, T_1, T_2 i vettori che contengono tutte le sollecitazioni di tipo $M1, M2, T1, T2$, cioè tutti gli elementi di colonna della matrice;

$R1, \dots, R16$ 16 matrici diagonali che contengono, rispettivamente nell'ordine, tutti gli elementi di profondità della matrice tridimensionale \mathbf{R} di fig. 3 che hanno eguali i primi due indici e nell'ordine indicato nella stessa figura 3.

$MIP1, TIP1, MIP2, TIP2$ i vettori contenenti nell'ordine prefissato i valori delle reazioni (momento e taglio) di incastro perfetto rispetto alle estremità 1 e 2 delle varie aste.

Le condizioni di equilibrio ai nodi possono sintetizzarsi in termini matriciali nella

$$A1M \cdot M1 + A1T \cdot T1 + A2M \cdot M2 + A2T \cdot T2 = F \quad (3)$$

dove F è il vettore che contiene, nell'ordine dato ai nodi, le forze esterne applicate ai nodi stessi.

Per risolvere il problema occorre ora solo sostituire la (2^a) nella (3), ne segue la:

$$\begin{aligned} A1M [(R1 \cdot A1M^T + R2 \cdot A1T^T + R3 \cdot A2M^T + R4 \cdot A2T^T) \boldsymbol{\theta} + MIP1] + A1T [(R5 \cdot A1M^T + \\ + R6 \cdot A1T^T + R7 \cdot A2M^T + R8 \cdot A2T^T) \boldsymbol{\theta} + TIP1] + A2M [(R9 \cdot A1M^T + \\ + R10 \cdot A1T^T + R11 \cdot A2M^T + R12 \cdot A2T^T) \boldsymbol{\theta} + MIP2] + A2T [(R13 \cdot A1M^T + \\ + R14 \cdot A1T^T + R15 \cdot A2M^T + R16 \cdot A2T^T) \boldsymbol{\theta} + TIP2] = F \end{aligned} \quad (4)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} (A1M \cdot R1 \cdot A1M^T + A1M \cdot R2 \cdot A1T^T + A1M \cdot R3 \cdot A2M^T + A1M \cdot R4 \cdot A2T^T + \\ + A1T \cdot R5 \cdot A1M^T + A1T \cdot R6 \cdot A1T^T + A1T \cdot R7 \cdot A2M^T + A1T \cdot R8 \cdot A2T^T + \\ + A2M \cdot R9 \cdot A1M^T + A2M \cdot R10 \cdot A1T^T + A2M \cdot R11 \cdot A2M^T + \\ + A2M \cdot R12 \cdot A2T^T + A2T \cdot R13 \cdot A1M^T + A2T \cdot R14 \cdot A1T^T + \\ + A2T \cdot R15 \cdot A2M^T + A2T \cdot R16 \cdot A2T^T) \boldsymbol{\theta} + A1M \cdot MIP1 + \\ + A1T \cdot TIP1 + A2M \cdot MIP2 + A2T \cdot TIP2 = F \end{aligned} \quad (4')$$

La (4) è un sistema algebrico lineare a diagonale principale dominante (*) nella incognita $\boldsymbol{\theta}$, che, detta C una matrice di ordine $NINC \times NINC$, definita dalla

$$C = C1 + C2 + C3 + C4 + \dots + C16 \quad (5)$$

con

$$\begin{aligned} C1 &= A1M \cdot R1 \cdot A1M^T \\ C2 &= A1M \cdot R2 \cdot A1T^T \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

e così sino a $C16$, si riduce alla

$$C \boldsymbol{\theta} = F^* \quad (7)$$

dove F^* è: $F - (A1M \cdot MIP1 + A1T \cdot TIP1 + A2M \cdot MIP2 + A2T \cdot TIP2)$.

Questo sistema può essere quindi facilmente risolto (la dominanza della diagonale principale permette anche la risoluzione del sistema (5) con metodi iterativi, quali quelli del surrilassamento).

Il vettore $\boldsymbol{\theta}$ così ottenuto, sostituito nella (2), permette di ricavare le sollecitazioni $\mathbf{S}(k, i)$ delle singole aste.

3 - Estensione ai telai con aste inclinate

Nel trattare telai con aste inclinate non si può prescindere dal considerare la deformazione assiale di queste ultime, con il conseguente aumento di incognite che ciò comporta.

Lo spostamento sia orizzontale che verticale di un nodo in cui convergono aste comunque orientate non può verificarsi senza la loro deformazione assiale.

A questo punto la matrice di rigidezza della trave non sarà più quella vista in precedenza, ma terrà conto pure del fatto che gli estremi della generica trave, oltre che a ruotare e traslare perpendicolarmente, subiscono un avvicinamento o allontanamento.

La matrice di rigidezza assume cioè la forma classica:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} \end{vmatrix}$$

All'aumento delle incognite è pure legato l'aumento del numero delle matrici topologiche che correlano ogni asta con gli spostamenti nodali incogniti.

Si aggiungono così alle matrici topologiche $A1M, A1T, A2M, A2T$ le matrici $A1N, A2N$, che mettono in relazione ogni asta con l'incognito spostamento verticale cui questa contribuisce con la sua estremità 1 o 2.

Tenendo presente che la matrice di rigidezza trovata è riferita ad un sistema di assi solidale alla trave, comunque questa sia orientata (asse x coincidente con l'asse della trave), e che gli spostamenti che si ottengono con la risoluzione del problema sono riferiti ad un sistema solidale con la struttura, sarà bene riferire a quest'ultimo tutte le matrici di rigidezza delle singole travi.

(*) Che la diagonale principale sia dominante è provato dai seguenti asserti:

I - la somma di matrici a diagonale principale dominante, i cui elementi siano tutti dello stesso segno, è ancora una matrice a diagonale principale dominante;

II - Il prodotto matriciale

$$C = A \cdot B \cdot D,$$

dove A e D sono matrici topologiche e B una matrice diagonale, è una matrice a diagonale principale dominante.

Il primo asserto non ha bisogno di dimostrazione.

Il secondo è già stato, da alcuni di Noi, dimostrato in precedenza (MANTICA & RIBIGHINI 1979) per il caso particolare in cui le topologiche A e D fossero l'una la trasposta dell'altra e B una matrice diagonale del tipo delle R_i di cui alla (4).

La condizione di dominanza della C è espressa, come è noto, dalla:

$$\left| c_{ii} \right| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left| c_{ik} \right|$$

ora

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_{jj} d_{ji} \quad (\text{II})$$

mentre

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M c_{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} b_{jj} d_{jk} \quad (\text{III})$$

Poiché sia la matrice A che la D hanno in ciascuna colonna al più due soli elementi non nulli e pari all'unità (positiva o negativa), segue che la (I) sarà verificata con il segno dell'uguaglianza.

Detta λ la matrice di rotazione che ha la forma:

$$\lambda = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La relazione che consente il passaggio della matrice di rigidezza R (riferita al sistema locale) alla R' , (riferita al sistema solidale alla struttura) è la nota relazione:

$$R' = \lambda^T \cdot R \cdot \lambda \quad (8)$$

In quest'ottica anche le forze di incastro perfetto debbono, di conseguenza, subire una trasformazione:

$$F' = \lambda^T \cdot F \quad (9)$$

Ciò premesso si procede come fatto in precedenza.

la matrice \mathbf{R} vista in figura 3 sarà ora una matrice tridimensionale di ordine $6 \times 6 \times \text{NASTE}$, mentre le (2'') assumono la forma:

$$\begin{aligned} M_1 &= (R1 \cdot A1M^T + R2 \cdot A1T^T + R3 \cdot A1N^T + R4 \cdot A2M^T + R5 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R6 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{MIP1} \\ T_1 &= (R7 \cdot A1M^T + R8 \cdot A1T^T + R9 \cdot A1N^T + R10 \cdot A2M^T + R11 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R12 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{TIP1} \\ N_1 &= (R13 \cdot A1M^T + R14 \cdot A1T^T + R15 \cdot A1N^T + R16 \cdot A2M^T + R17 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R18 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{NIP1} \\ M_2 &= (R19 \cdot A1M^T + R20 \cdot A1T^T + R21 \cdot A1N^T + R22 \cdot A2M^T + R23 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R24 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{MIP2} \\ T_2 &= (R25 \cdot A1M^T + R26 \cdot A1T^T + R27 \cdot A1N^T + R28 \cdot A2M^T + R29 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R30 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{TIP2} \\ N_2 &= (R31 \cdot A1M^T + R32 \cdot A1T^T + R33 \cdot A1N^T + R34 \cdot A2M^T + R35 \cdot A2T^T + \\ &\quad + R36 \cdot A2N^T) \boldsymbol{\theta} + \text{NIP2} \end{aligned} \quad (10)$$

analoga alla (2''), con ovvio significato dei simboli.

Gli spostamenti così ricavati, riferiti al sistema solidale all'intera struttura, sono riportati al riferimento locale tramite la

$$\boldsymbol{\theta}_j = \lambda_j \boldsymbol{\theta}'_j$$

dove:

λ_j = matrice rotazione dell'asta j -esima;

$\boldsymbol{\theta}_j$ = spostamenti d'estremità secondo il riferimento locale dell'asta j -esima;

$\boldsymbol{\theta}'_j$ = spostamenti d'estremità secondo il riferimento globale dell'asta j -esima.

4 - Ulteriori estensioni

Come è ovvio non vi è alcuna difficoltà concettuale ad estendere il metodo qui esposto ai telai spaziali, siano essi ad aste rette che inclinate, inoltre è possibile anche utilizzarlo per lo studio dei telai sottoposti a sollecitazioni dinamiche.

5 - Esempio numerico

L'esempio numerico che qui si riporta è riferito al telaio ad aste inclinate di figura 4, dalla quale è possibile dedurre e la numerazione delle aste e quella delle incognite.

La tabella II riporta le misure del telaio della fig. 4 nonché i carichi per i quali il detto telaio è stato risolto.

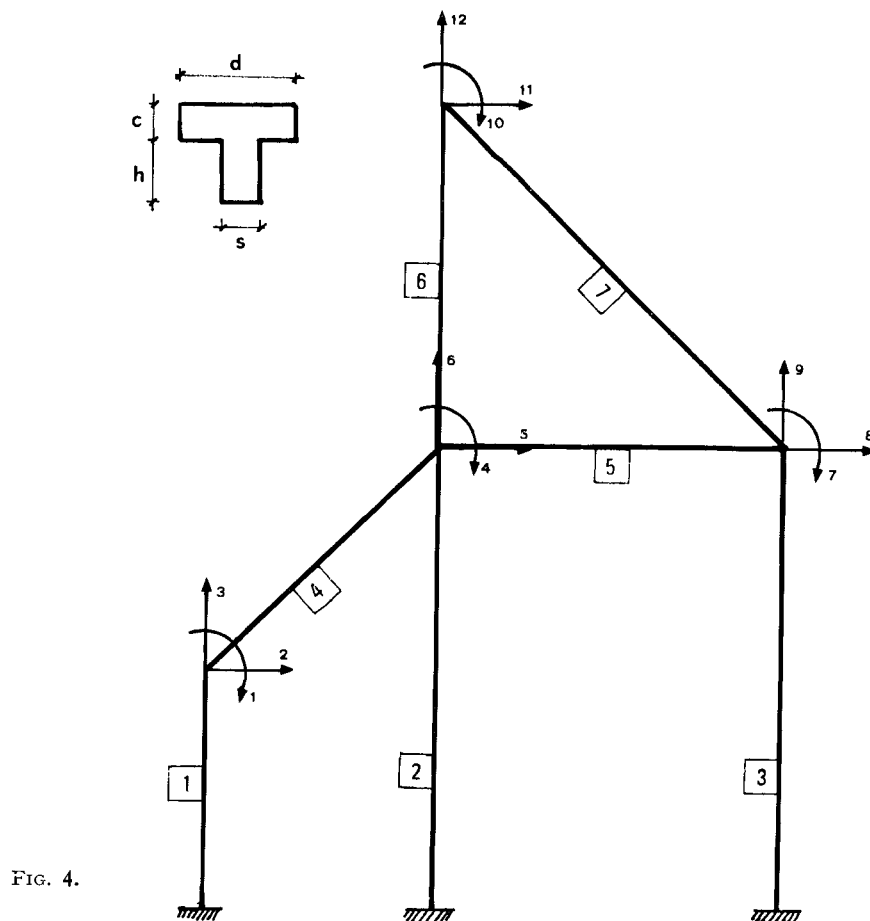


FIG. 4.

La tabella III riporta i risultati esprimendo i momenti in tm e gli sforzi in t e con segni conformi alle indicazioni della figura 4.

TABELLA II

Caratteristiche geometriche e di carico del telaio di fig. 4

Asta	Coordinate				Dimensione della sezione dell'asta				Carichi	
	Nodo 1		Nodo 2		c (cm)	h (cm)	d (cm)	s (cm)	PN (*) (tm)	PT (**) (tm)
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)						
1	0	0	0	2	0	40	0	40	—	—
2	2	0	2	4	0	40	0	40	—	—
3	5	0	5	4	0	40	0	40	—	—
4	0	2	2	4	0	40	0	40	2	1
5	2	4	5	4	0	40	0	40	15	—
6	2	4	2	7	0	40	0	40	—	—
7	2	7	5	4	0	40	0	40	20	—15

(*) Carichi normali all'asse trave

(**) Carichi paralleli all'asse trave.

Sforzi alle estremità delle aste

Asta	Estremità 1 dell'asta			Estremità 2 dell'asta		
	Momento (tm)	Taglio (t)	Sforzo normale (t)	Momento (tm)	Taglio (t)	Sforzo normale (t)
1	— .5547E + 00	— .6443E — 02	.2610E + 01	.5676E + 00	.6443E — 02	— .2610E + 01
2	— .5290E + 00	— .6443E — 02	.2610E + 01	.5547E + 00	.6443E — 02	— .2610E + 01
3	— .2013E + 01	.5951E + 00	.3915E + 01	— .3677E + 00	— .5951E + 00	— .3915E + 01
4	— .8198E + 01	.5082E + 01	.7753E + 01	— .5376E + 01	— .4516E + 01	— .7470E + 01
5	— .1000E + 01	.2095E + 00	— .1404E + 01	.1466E + 01	.2405E + 01	.1404E + 01
6	.8006E + 00	— .8153E + 00	.4430E + 01	.1645E + 01	.8103E + 00	— .4430E + 01
7	— .1645E + 01	.3709E + 01	— .2556E + 01	.3910E + 01	.4776E + 01	— .3808E + 01

6 - Conclusioni

Sebbene il tempo impiegato per l'esempio numerico precedente possa sembrare piuttosto alto (1.264 sec. usando il CY 7600-CDC del Centro Interuniversitario di Casalecchio sul Reno (CINECA)) il metodo proposto risulta essere molto generale e quindi adattabile ai più svariati casi che si potrebbero verificare.

BIBLIOGRAFIA

- BOSCOTRECASE, L. & MINERVINI, E.: *Teoria e tecnica delle costruzioni*. Patron, Bologna.
- CALZONA, R.: *Tecnica delle costruzioni*. Esa, Roma.
- CHANDRASHEKAR, M. & STEWART, K.H.: *Sparsity oriented analysis of large pipe networks*. Jr. HY 4(ASCE), 1975.
- CURTO, C., CUSIMANO, M. & NOBILI, C.: *Un nuovo procedimento di calcolo automatico per la verifica delle reti idrauliche in pressione*. XV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche. Roma 1976.
- GIUFFRÈ, A.: *Analisi matriciale delle strutture*. Tamburini, Milano.
- KEVASAN, H. & CHANDRASHEKAR, M.: *Graph-Theoretic models for pipe network analysis*. Jr. HY 2 (ASCE), 1972.
- LAM, C.F. & WOLLA, M.L.: *Computer analysis of water distributions systems*. Part. I: *Formulation of equations*. HY 2 - Part II: *Numerical solution*. HY 3 (ASCE), 1972.
- MANTICA, I. & RIBIGHINI, G.: *Modello matematico per le reti di distribuzione degli acquedotti urbani ad anello. Il problema della simulazione durante l'esercizio*. « Giornale del Genio Civile », n. 4-5-6 (Aprile-Maggio-Giugno), 1979).
- TONIOLO, G.: *Teoria della matrice di trasmissione*. Tamburini, Milano.
- TONIOLO, G.: *Analisi strutturale con l'elaboratore elettronico*. Tamburini, Milano.