

C. E. M. P. A. - I. A. H.

V CONVEGNO INTERNAZIONALE SULLE ACQUE SOTTERRANEE

17-21 NOVEMBRE 1985- TAORMINA

tema n. 2

I. MANTICA<sup>(1)</sup> & G. RIBIGHINI<sup>(2)</sup>

RISOLUZIONE APPROSSIMATA, PER VIA NUMERICA, DI UN PROBLEMA DI  
FRONTIERA LIBERA DELL'IDRAULICA DELLE ACQUE SOTTERRANEE IN  
MEZZO POROSO ETEROGENEO

(1) Associato di Costruzioni Idrauliche;

(2) Ricercatore di Ruolo presso l'Istituto di Informatica;

entrambi presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università  
di Ancona

1. Le falde delle pianure alluvionali sono spesso riconducibili ad acquiferi porosi, non omogenei e freatici.

Riferiamo un tale acquifero ad una terna di assi cartesiani ortogonali con l'asse z verticale e positivo verso l'alto e con l'asse x tale che il piano xz contenga il vettore velocità di filtrazione nella ovvia ipotesi che questi abbia sempre la medesima giacitura.

Conseguentemente, nell'ipotesi aggiuntiva che il mezzo sia omogeneo in direzione y, segue che lungo tale asse tutte le grandezze in gioco saranno nulle o costanti.

Il problema è quindi ricondotto ad un problema piano, dove l'equazione indefinita d'equilibrio dinamico (MANTICA-1980)

$$\frac{S_w}{g} \frac{\partial P}{\partial t} - \text{div} \left[ \rho K \text{grad} \left( h + \frac{P}{\gamma} \right) \right] = q' \rho \quad (1)$$

si riduce alla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\rho K_x \frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{P}{\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\rho K_z \frac{\partial}{\partial z} \left( h + \frac{P}{\gamma} \right) \right] = \rho q' - \frac{S_w}{g} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2)$$

Si ponga ora :

$$H = h + \frac{P}{\gamma} \quad (3)$$

ne segue che :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

da cui sostituendo la (3) e la (4) nella (2) ed integrando la stessa lungo  $z$ , si avrà:

$$\int_0^H \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\rho k \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] dz = \rho q - \frac{\int_0^H S_u dz}{g} \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5)$$

dove

$$q = \int_0^H q' dz$$

supposto poi  $\rho = \text{cost.}$ , segue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^H K dz \frac{\partial H}{\partial x} \right] = -q + \int_0^H S_u dz \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5')$$

L'integrale a secondo membro :

$$\int_0^H S_u dz$$

rappresenta il così detto coefficiente di immagazzinamento  $S$  e pertanto può essere sostituito con l'espressione :

$$S = S(x, H(x, t))$$

da cui :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^H K dz \frac{\partial H}{\partial x} \right] = -q + S[x, H(x, t)] \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5'')$$

Analogamente l'integrale

$$\int_0^H K dz$$

può essere riguardato come la trasmissività locale  $T$  dell'acquifero, dove  $T$  dipende, contrariamente a quanto avviene per le falde artesiane, anche dal tempo, oltre che dallo spazio.

Si può dunque scrivere la:

$$T = T(x, H(x, t)) = \int_0^H K dz \quad (6)$$

che sostituita nella (5'') da la :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) = -q + S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5''')$$

2. Alla (5'') vanno associate le condizioni al contorno, ove esso e' noto, e quelle iniziali.

Se poniamo l'attenzione sull'acquifero schematizzato in fig. 1 e grossomodo rispondente a quello della esemplificazione numerica esposta in 6, le condizioni al contorno si riducono

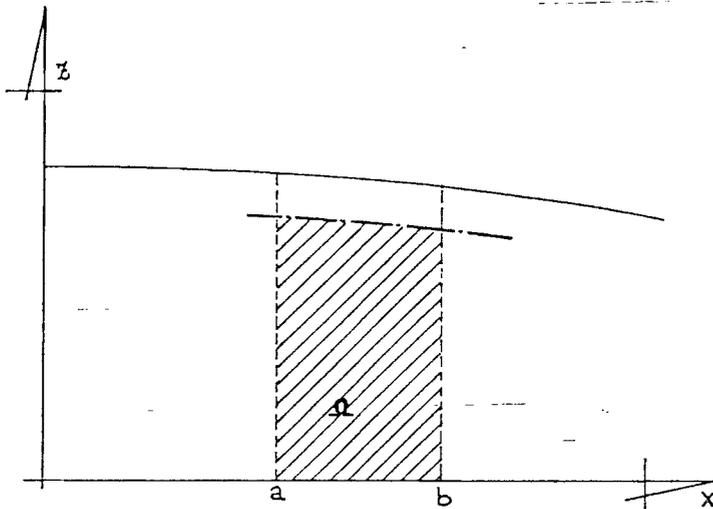


Fig. 1

alla conoscenza in a e b :

- o dei valori del potenziale H (cond. di Dirichlet)
- o dei valori della sua derivata prima  $\partial H / \partial x$  (cond. di Neumann)

Ad esse va aggiunta la condizione iniziale, cioè la conoscenza della funzione

$$H = H(x, t) \Big|_{t=0}$$

dove t e' l'istante iniziale del periodo che si desidera studiare.

3. Il problema esposto in 1 si inquadra, da un punto di vista matematico, in quelli di soluzioni di equazioni integro-differenziali in un dominio a frontiera libera, argomento ben complesso ed una cui trattazione rigorosa esula dalle intenzioni e dalle competenze degli scriventi.

Problemi di tale tipo sono stati affrontati anni or sono dai ricercatori del L.A.N. (Laboratorio di Analisi Numerica) del C.N.R. presso l'Università di Pavia, interessati a ciò dal prof. Maione e numerosi sono gli articoli con i quali i matematici pavesi hanno relazionato sull'argomento, dimostrando per la totalità dei casi affrontati l'esistenza (sia pur debole) e l'unicità della soluzione.

Spesso a tali risultati si è pervenuti dapprima per via numerica e, solo successivamente, per via analitica, di più difficile praticabilità.

Tra i lavori di tali studiosi viene qui ricordato quello di E. MAGENES (1972) che rappresenta lo status dell'arte all'epoca delle cennate ricerche.

Il problema illustrato da Magenes è quello della diga a sezione rettangolare e non molto dissimile dal nostro (almeno dal punto di vista dello spazio sul quale si vuole studiare il moto del fluido nel mezzo poroso) ed è stato affrontato in passato da studiosi quali Muskat (1947), Palubarinova e Kocina (1962), Harr (1962), Hamel (1934), Arin e Numerov (1965) con il metodo delle trasformate conformi ed in particolare con quello del così detto "piano odografo".

In tempi più recenti Southwell (1946), Cryer (1971), Neumann e

Witherspoon (1970) ed altri hanno risolto il problema tramite l'Analisi Funzionale, riconducendolo o alla soluzione di un'equazione funzionale od alla stabilizzazione di un funzionale.

Questi ultimi metodi, sviluppati in particolare dal punto di vista numerico, hanno fornito, secondo Magenes (loc.cit.), soluzioni che "si sono dimostrate efficaci" anche se i procedimenti non sono "rigorosi".

A risultati numerici soddisfacenti sono giunti anche Commencioli, Guerri e Volpi (1971) del L.A.N. di Pavia.

Il metodo di BAIOCCHI (1972) dà, invece, a tali problemi una soluzione rigorosa da un punto di vista matematico ed inoltre risulta efficace per l'applicazione numerica dello stesso.

Esso consta nel ricondurre il problema a quello di una disequazione variazionale ellittica su un insieme convesso chiuso di uno spazio Hilbertiano.

4. In questa Nota gli Autori si propongono di risolvere la (5''') in H, allorquando siano noti i parametri idrogeologici e le condizioni di emungimento e di alimentazione dell'acquifero. A tale scopo, sviluppando la derivata a primo membro della (5''') si ottiene la

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -q + S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7)$$

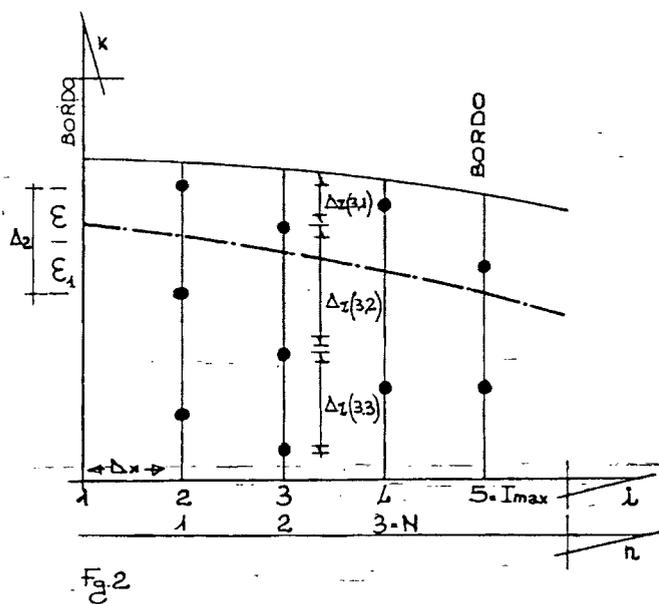
che potrà essere risolta tramite discretizzazione alle differenze finite.

Poiché, nelle applicazioni pratiche non è irrilevante il caso di moto permanente, si è dapprima fissata l'attenzione su tale ipotesi che comporta la riduzione della (7) alla :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -q \quad (8)$$

D'altra parte la soluzione della (7) nel caso più generale di moto vario utilizza, come si vedrà, risultati ottenuti per il moto permanente.

Si fissi quindi l'attenzione su un dominio discretizzato come in figura 2



con ovvio significato di  $\Delta x$  e  $\Delta z_{i,k}$ .

In particolare si supponga, in una prima fase, che la discretizzazione lungo l'asse delle  $x$  sia a passo costante (nessuna ipotesi restrittiva viene fatta sui passi  $\Delta z$ ) e si discretizzi la (8) tramite la classica formula a tre punti, ovvero, considerato il punto  $P(i)$  della rete delimitato dai punti  $P(i-1)$  e  $P(i+1)$  ed indicando con  $d$  una qualunque delle grandezze  $H, Q$  e  $T$ , in questo punto, il valore medio della funzione e quello delle sue derivate prime e seconde sono rispettivamente dati da:

$$d(P)$$

$$\frac{d(P_{i+1}) - d(P_{i-1}))}{2\Delta x}$$

$$\frac{d(P_{i+1}) - 2d(P_i) + d(P_{i-1}))}{\Delta x^2}$$

Pertanto la (8), così discretizzata, assume la forma:

$$(T_{i-1} + 4T_i - T_{i+1})H_{i-1} - 8T_i H_i + (-T_{i-1} + 4T_i + T_{i+1})H_{i+1} = -4q_i \Delta x^2 \quad (9)$$

$$i = 1, J_{\max} - 1$$

Con l'aggiunta delle condizioni al contorno (del tipo di Dirichlet) relative ai punti di indice  $i=1$  ed  $i=I_{\max}$  (vedi figura 2), ovvero supposto noto il potenziale nei punti  $i=1$  ed  $i=I_{\max}$ , segue che le (9) costituiscono un sistema apparentemente lineare in  $H$  di  $N=I_{\max}-2$  equazioni in altrettante incognite e suscettibile di essere sintetizzato nella formula

matriciale:  $A * H = B$

(10)

dove :

$A$  e' la matrice dei coefficienti del sistema, di ordine  $(N * N)$  nella quale la generica riga  $n$ -esima e' caratterizzata dall'avere tutti gli elementi nulli ad eccezione di :

$$\left. \begin{aligned} a_{n,n-1} &= +T_{i-1} + 4T_i - T_{i+1} \\ a_{n,n} &= -8T_i \\ a_{n,n+1} &= -T_{i-1} + 4T_i + T_{i+1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 1, N \\ i &= 2, I_{max} - 1 \end{aligned} \quad (11)$$

$H$  e' il vettore dei potenziali incogniti ;  
 $B$  e' il vettore dei termini noti il cui generico elemento vale :

$$b_n = -4 q_i \Delta x^2 \quad (12)$$

$n = 2, N-1$   
 $i = 2, I_{max} - 2$

(1) Per indicare gli elementi della matrice  $A$  e dei vettori  $B$  ed  $H$  viene utilizzato l'indice  $n$ , variabile da 1 ad  $N$ , per le altre grandezze si utilizza l'indice  $i$ , da 1 ad  $I_{max}$ .

(2) il termine "potenziale" e' qui usato, secondo la consuetudine, ma tuttavia impropriamente.

ad eccezione del primo e dell'ultimo che  
rispettivamente valgono:

$$b_1 = -4q_2 \Delta x^2 - (T_1 + 4T_2 - T_3) H_1$$

(13)

$$b_N = -4q_{I_{max}-1} \Delta x^2 - (T_{I_{max}} - T_{I_{max}-2} + 4T_{I_{max}-1}) H_{I_{max}}$$

Nei coefficienti di cui è composta la matrice  $A$  nonché in  
 $b(1)$  e  $b(N)$  compare sempre la trasmissività fittizia  $T$  la  
cui espressione in termini infinitesimali è data dalla (6).

Questa va quindi a sua volta discretizzata sostituendo  
l'integrale con la sommatoria tra  $k=1$  e  $k=K$ , questo ultimo

definito tale che :

$$\left| \sum_{k=1}^{K_m} \Delta z_{i,k} - H \right| = \varepsilon \quad (14)$$

dove  $\varepsilon > 0$  è il più piccolo possibile (3)

(3)

È opportuno precisare che si può riuscire a che sia  $\varepsilon = 0$ ;  
definito infatti un  $\varepsilon'$  tale che :

$$\varepsilon = H - \sum_{k=1}^{K_m-1} \Delta z_{i,k} \quad (1)$$

Pertanto l'espressione discretizzata della trasmissività fittizia diventa:

$$T_i = \sum_{K=1}^{K_{n-1}} K_{i,K} \Delta z_{i,K} + K_{i,K_n} \varepsilon' \quad (15)$$

$i = 1, J_{max}$

Poiché sovente nelle applicazioni pratiche ha interesse utilizzare intervalli spaziali variabili per meglio seguire l'andamento della linea piezometrica ( tale andamento infatti per lunghi tratti rimane pressocché costante, mentre variazioni dello stesso si possono concentrare in talune zone che pertanto è necessario analizzare con una rete più fitta) si è ritenuto opportuno rimuovere l'ipotesi che questi siano costanti.

Conseguentemente, nulla variando nella logica risolutiva della (8) i coefficienti della matrice  $A$ , come pure gli elementi del vettore  $B$  assumeranno le seguenti nuove espressioni:

(segue nota 2)

si può scrivere che:

$$\sum_{K=1}^{K_{m-1}} \Delta z_{i,K} + \varepsilon' - H = 0$$

(II)

e ponendo di volta in volta che

(III)

$$\Delta z_{i,K_m} = \varepsilon'$$

segue che

$$\sum_{K=1}^{K_m} \Delta z_{i,K} = H$$

$$a_{i,i-1} = \Delta x_{i+1} * \left[ -(\Delta x_i * T_{i+1} + (\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) * T_i - \Delta x_{i+1} * T_{i-1}) * (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) + 8 \Delta x_i \Delta x_{i+1} * T_i \right]$$

$$a_{i,i} = (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) * \left[ (\Delta x_i T_{i+1} + (\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) * T_i - \Delta x_{i+1} T_{i-1}) * (\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) - 8 \Delta x_i \Delta x_{i+1} T_i \right]$$

$$a_{n,n+1} = \Delta x_i \left[ (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) * \Delta x_i T_{i+1} + (\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) T_i - \Delta x_{i+1} T_{i-1} \right] + 8 \Delta x_i \Delta x_{i+1} T_i$$

$$\begin{cases} n = 1, N \\ i = 2, I_{max} - 1 \end{cases}$$

(16)

$$b_1 = -4 q_2 \Delta x_1^2 \Delta x_2^2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) - a_{1,0} H_1$$

$$b_n = -4 q_i \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}^2 (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

$$\begin{cases} n = 1, N-1 \\ i = 2, I_{max} - 2 \end{cases}$$

$$b_N = -4 q_{I_{max}-1} \Delta x_{I_{max}-1}^2 \Delta x_{I_{max}}^2 (\Delta x_n + \Delta x_{I_{max}}) - a_{N,N+1} H_{I_{max}}$$

Prendendo ora in considerazione l'ipotesi di moto non permanente e tenuto conto che la discretizzazione del primo membro della (7) e' del tutto indipendente dal tipo di moto, nonche' assumendo quasi del tutto trascurabili le variazioni temporali di S, segue, sempre con simbologia matriciale, la:

$$A H = B + \frac{S}{\Delta t} (H^{t_j} - H^{t_{j-1}}) \quad (17)$$

Ponendo ora :

$$S = \frac{S^*}{\Delta t} \quad (18)$$

dove  $S^*$  e' una matrice diagonale di ordine  $N \times N$ ; e utilizzando il metodo di CRANK-NICHOLSON secondo il quale il valore della  $H$  a primo membro puo' essere espresso, punto per punto, in funzione del valore che le  $H$  stesse assumono al tempo  $t(j)$  ed al tempo  $t(j-1)$  secondo l'espressione:

$$H = (1 - \vartheta) H^{t_{j-1}} + \vartheta H^{t_j} \quad (19)$$

dove  $\vartheta$  e' un coefficiente che rispetta la condizione

$$0 \leq \vartheta \leq 1 \quad (20)$$

nonche' sostituendo nella (17) la (19), si perviene alla:

$$A \left[ (1 - \vartheta) H^{t_{j-1}} + \vartheta H^{t_j} \right] = B + S^* \left[ H^{t_j} - H^{t_{j-1}} \right] \quad (21)$$

e cioè un sistema apparentemente lineare in  $H(t(j))$ .

(23)

$$DH^t = E$$

segue la :

(22)

$$D = A\theta - S^*$$

Posto ora :

$$E - B - S^* + A(1 - \theta) \left[ H^{-t} \right]$$

5. Il problema proposto consiste ora nella risoluzione della (10) o della (23) a seconda che trattasi di moto stazionario o meno.

Come già detto, la (10) è apparentemente lineare in  $H$  e può essere risolta iterativamente partendo da un vettore di tentativo col quale calcolare, in prima approssimazione, i valori di  $T$  e quindi, sempre in prima approssimazione, i valori dei coefficienti della matrici  $A$  e del vettore  $B$ .

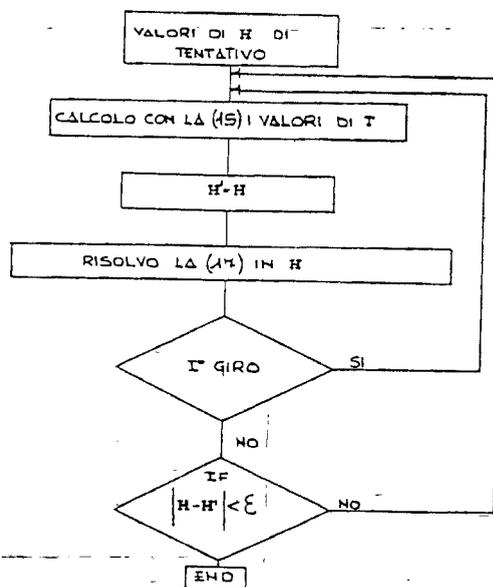
Nell'esempio numerico riportato in 6. sono state fatte prove con due differenti inizializzazioni :

a) assumendo il vettore  $H$  di tentativo variante linearmente da  $H(1)$  ad  $H(I_{max})$ ;

b) assumendo il generico  $H(i) = H(I_{max})$   
 $i \neq I_{max}$

e si è constatato che, almeno per il caso in esame, queste non comportano differenze sostanziali.

La fig. 3 illustra lo schema logico dei calcoli da eseguirsi



Analogamente, anche per la (23), cioè per il caso di moto non permanente, occorre far ricorso alla logica delle approssimazioni successive.

In particolare si è assunta come valore di tentativo al tempo  $t(j)$  la soluzione ottenuta al tempo  $t(j-1)$  e pertanto lo schema logico risolutivo della (23) è quello sotto riportato:

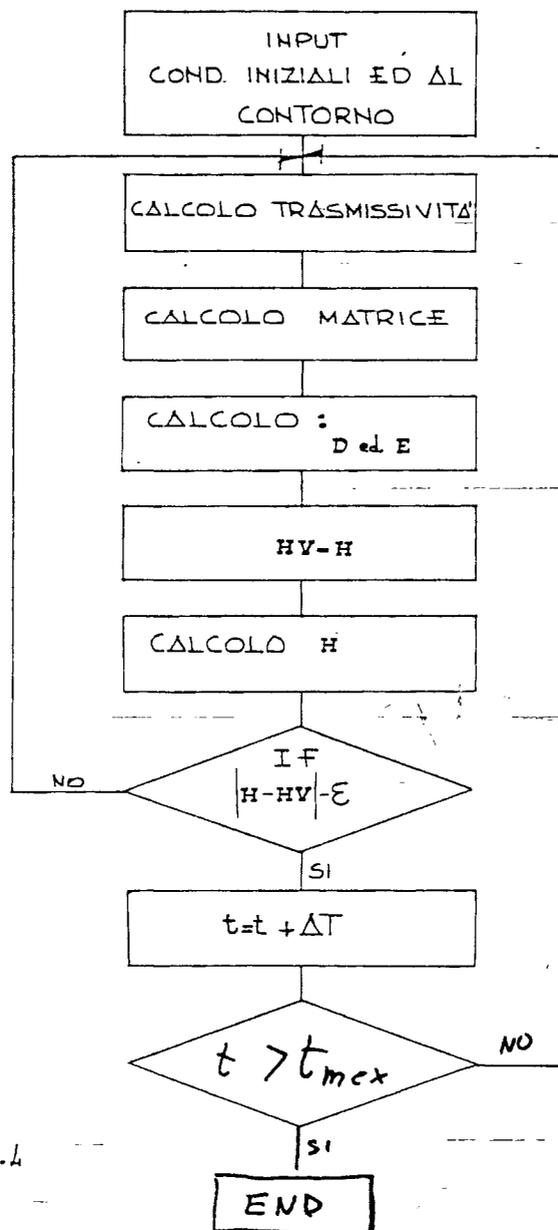


Fig. 4

6. La fig. 5 riproduce la sezione retta di una falda litoranea alimentata dal fiume Pescara.

Le caratteristiche idrologiche del terreno sono note tramite sondaggi e prove di pompaggio (COLOSIMO & MANTICA, 1985), queste ultime effettuate in corrispondenza di  $i=8$  di detta figura.

Taluni dei parametri rilevati e riportati nella tabella seguente rappresentano i dati di INPUT del problema, una volta supposto che per  $i \neq 8$  si abbia la medesima situazione stratigrafica.

TAB. I

PERMEABILITA'			
N° ORDINE DALL'ALTO	POTENZA STRATO	PROT. DAL P.d.t	PERMEABILITA'
	m	m	m/sec
1	8	8	$1.5 E-6$
2	9	15	$1 E-5$
3	2.8	4.3	$1.5 E-4$
4	3	7.3	$1 E-5$
5	6.5	13.8	$5 E-5$
COEFF. D'IMMAGZZINAMENTO $S = .16$			m/sec

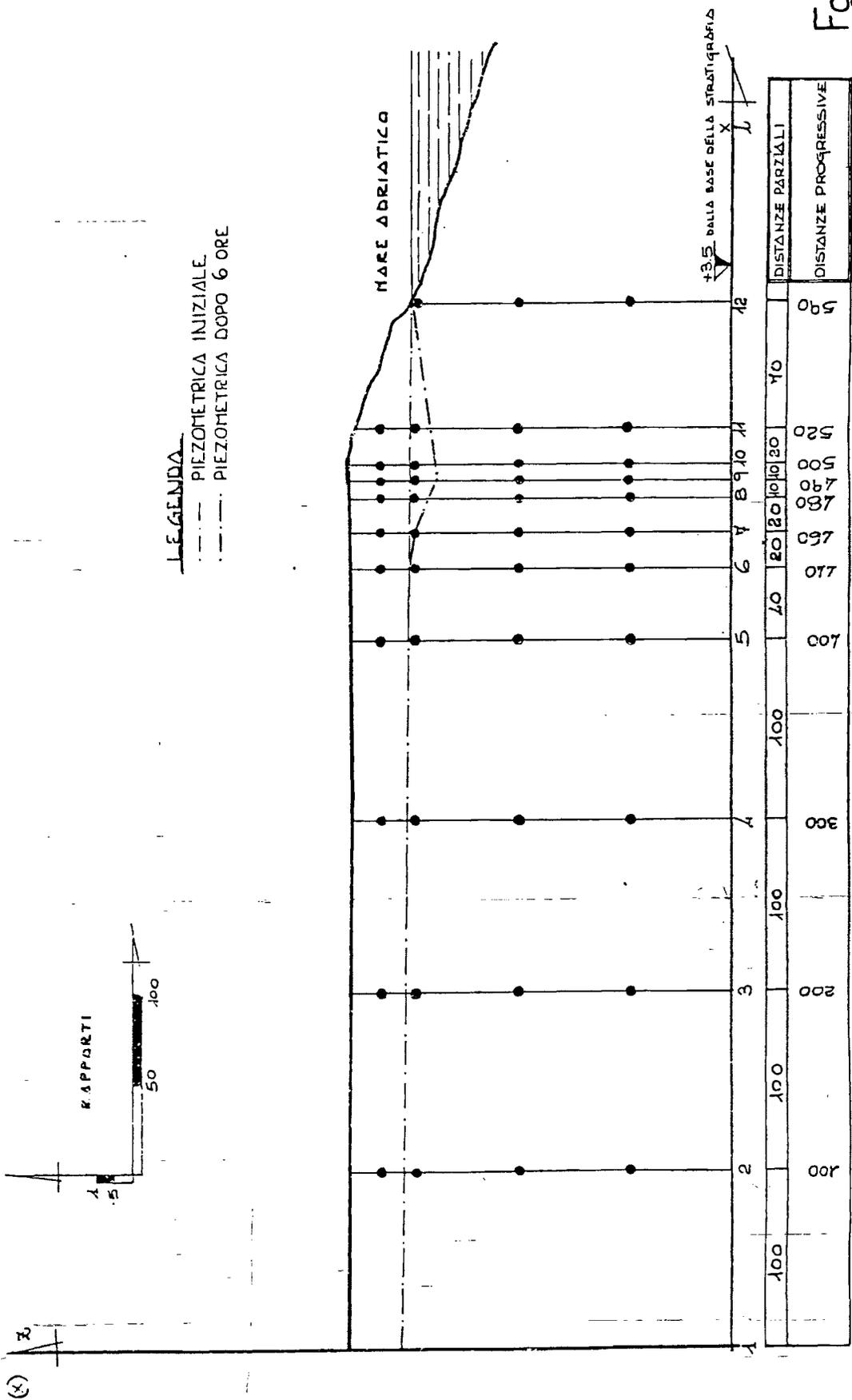
Ammissa nota la condizione di moto stazionario si è assunta questa quale condizione iniziale e si è ipotizzato un pompaggio costante in corrispondenza di  $i=9$  pari a  $.004$  mc/s a partire dal tempo  $t=2$  e sino al tempo  $t=10$ , con  $t$  espresso in ore.

Con l'ausilio di un programma in linguaggio BASIC che traduce lo schema logico di fig. 4, si è calcolato l'effetto dell'emungimento sulla superficie piezometrica della falda ed i risultati ottenuti per  $t=6$  sono riportati graficamente nella stessa fig. 5.

Purtroppo non è stato possibile verificarli con dati reali, ma agli Autori sembrano poter superare con buona approssimazione il confronto con i dati sperimentali che si otterranno allorché nella zona in esame verranno effettivamente prodotti degli emungimenti per il drenaggio di una profonda trincea atta a permettere la realizzazione di un collettore fognario.

Tabella II

CONDIZIONI INIZIALI	
Ascissa (m)	Potenziali (m)
0	12.6
100	12.5482211
200	12.4964076
300	12.4445595
400	12.3926768
440	12.3719139
460	12.3615305
480	12.3511456
490	12.3459526
500	12.3407593
520	12.3303717
560	12.3



Fg. 5

## 7. simbologia adottata

P	Punto generico del mezzo fluido e/o poroso
p	pressione in P
h	altezza di P su un piano orizzontale fisso di riferimento
$\gamma$	peso specifico in P
$\rho$	densita' in P
$\mu$	viscosita' del fluido in P
K	permeabilita'
S <sub>u</sub>	coefficiente di immagazzinamento unitario
S	coefficiente di immagazzinamento
i, k	indici rispettivamente degli assi x, z
q'	portata del pozzo o della sorgente matematica puntiforme
q	portata del pozzo o della sorgente matematica lineare
H	potenziale
T	trasmissivita'
$\Delta t$	intervallo di tempo

## 8. Bibliografia

- C. BAIOCCHI, V. COMMINCIOLI, E. MAGENES & G.A. POZZI (1971)  
Free boundary problems in the theory of fluid  
through porous media.  
Existence and uniqueness theorems.  
Annali di matematica pura ed applicata-
- P. COLOSIMO & I. MANTICA (1985) Relazione e studi su proposte di  
variante per la costruzione del rivierasco di  
Pescara. Rapporti privati per l'Associazione  
imprese stradali - Pescara.
- E. MAGENES (1972) Su alcuni problemi ellittici di frontiera  
libera connessi con il comportamento dei fluidi  
nei mezzi porosi  
Symposia Math INAM ROMA vol. X 1172, 265, 279.
- I. MANTICA (1980) equazioni del flusso delle acque sotterranee e  
loro riduzione alle differenze finite con  
le relative condizioni al contorno  
L'INGEGNERE N. 5-1980