

Equazioni del flusso delle acque sotterranee e loro riduzione alle differenze finite con le relative condizioni al contorno

dott. ing. Ignazio Mantica *

L'A. dopo una messa a punto, sia pur sintetica, della teoria a sostegno delle equazioni indefinite dell'equilibrio dinamico delle acque sotterranee nei mezzi porosi ed in particolare nelle falde delle pianure alluvionali e ricordando la quasi impossibilità di integrazione delle stesse per via analitica ne espone una discretizzazione alle differenze finite che permette la risoluzione per via numerica. Il problema discretizzato risulta essere lineare e con ottime caratteristiche algebriche.

1. Equazioni dell'idraulica nei mezzi porosi

L'equilibrio dinamico dei fluidi pesanti e viscosi è notoriamente esprimibile tramite l'equazione di Stokes-Navier⁽¹⁾.

$$\text{grad}(p + \gamma h) = -\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

alle quali, al fine di rendere determinato un qualunque problema di dinamica dei fluidi occorre associare le equazioni di continuità (principio di conservazione della massa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

e le equazioni di stato, che possiamo assumere nella semplificata forma:

$$\rho = \rho_0 [1 + (p - p_0)/\epsilon] \quad (3)$$

* Professore incaricato di Idrogeologia Applicata ed Assistente Ordinario presso l'Istituto di Geologia Applicata - Facoltà di Ingegneria - Ancona.

⁽¹⁾ La (1) andrebbe completata, al secondo membro, con l'addendo

$$-\frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{V}$$

che diviene nullo ammettendo che ρ dipenda solo dal tempo e non dal punto.

Queste equazioni alle derivate parziali seconde nello spazio e prime nel tempo sono sufficienti a rappresentare il moto dei fluidi, ed in particolare dell'acqua, purché siano note le condizioni al contorno e quelle iniziali.

Tuttavia nei mezzi porosi a causa della impossibilità di conoscere la geometria del dominio delle precedenti è necessario che queste vengano interpretate in senso statistico tramite l'introduzione del concetto di porosità che ci permette di applicarle, anziché alle sole cavità, a tutto l'acquifero la cui geometria può, invece, essere determinata.

È opportuno ricordare che la definizione di porosità

$$n = \frac{V_v}{V_v + V_g} \quad (4)$$

non è di tipo puntuale, quali quelle della densità, del peso specifico, ecc... essendo in questo caso una tale definizione evidentemente non significativa.

Le quantità a secondo membro della (4) devono essere pertanto riferite ad un volume geometrico discreto, per esempio un cubo di lato L ; allora la (4) dà per valore della porosità un valore medio per quel dato cubo ⁽²⁾ che viene assegnato a tutti i punti di questo.

Giova sottolineare che l'approccio statistico non è una approssimazione più o meno gratuita ma una necessità in quanto non è possibile definire in altro modo la geometria, in piccolo,

⁽²⁾ Per renderci meglio conto di tale asserito suddividiamo il cubetto di lato L in 1000 di lato $L/10$ (purché quest'ultimo sia sempre molto maggiore della dimensione massima dei grani solidi) per ognuno dei quali si potrà calcolare, tramite la (4) una porosità, in generale diversa da quella degli altri cubetti. Si può dimostrare che la media della porosità dei cubetti di lato $L/10$ è pari a quella di lato L . Potremmo poi ancora suddividere il cubetto di lato $L/10$ in 1000 di lato $L/100$, ecc...

del mezzo poroso; d'altra parte offre la possibilità di trattare questo come un dominio a frontiera unica e peraltro nota.

Dal punto di vista statistico non ha più senso parlare, per le acque filtranti di velocità (puntuale) della particella liquida ma sarà opportuno parlare di velocità di filtrazione, definita, in tutti i punti dell'acquifero (e non solo in quelli occupati dall'acqua) come rapporto tra la portata che attraversa una sezione di area finita S e quest'ultima area.

Con riferimento ad una generica terna di assi cartesiani ortogonali, la portata che attraverserà una superficie piana normale all'asse generico i di area totale A_i di cui $A_{v,i}$ di vuoti è:

$$Q_i = \bar{V}_i A_{v,i}$$

da cui la velocità di filtrazione $V_{f,i}$ sarà:

$$V_{f,i} = \frac{Q_i}{A_i} = \bar{V}_i \frac{A_{v,i}}{A_i} \quad \text{ma} \quad n = \frac{A_{v,i}}{A_i}$$

$$\text{segue } V_{f,i} = n \bar{V}_i$$

La (5) permette anche di definire un vettore velocità di filtrazione:

$$\vec{V}_f = V_{f,i} \vec{i} + V_{f,j} \vec{j} + V_{f,k} \vec{k} \quad (5)$$

Tenuto ora conto che in questa visione statistica possiamo ammettere che il moto si svolga in tanti piccoli filetti paralleli di sezione costante e secondo le leggi del moto laminare (in quanto il numero di Reynolds sarà molto basso) l'espressione dell'equilibrio dinamico diventa ⁽³⁾

$$\vec{V}_f = -K \text{grad} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (6)$$

dove la costante K è detta permeabilità e dipende dalla granulometria e tessitura del mezzo poroso. La (7) è, a volte, interpretata con notazione

⁽³⁾ Se assumiamo r il raggio dei filetti, applicando la formula di Poiseuille, avremo

$$V = -\frac{r^2 \gamma}{8\mu} \text{grad} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \quad \text{cioè} \quad V_f = -\frac{nr^2 \gamma}{8\mu} \text{grad} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right)$$

$$\text{dove, posto } K = \frac{nr^2 \gamma}{8\mu}$$

è la (6).

tensoriale: allora K indicherà un tensore del secondo ordine (cioè con nove componenti) e la generica delle tre equazioni sintetizzate dalla (6) sarà:

$$V_{f,i} = - \sum_{j=1}^3 K_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (7)$$

Di norma si pone

$$K_{i,j} = 0 \quad \text{con } i \neq j$$

Il mezzo poroso si definisce anisotropo se

$$K_{i,i} \neq K_{j,j}$$

ed isotropo se

$$K_{i,i} = K_{j,j}$$

La (3) va anch'essa omogeneizzata sommando alla comprimibilità del fluido quella del terreno (m_v) dovuta alla variazione di porosità provocata dalla variazione di pressione (e trascurando quella propria dei granelli solidi) per cui diventa

$$\rho = \rho_0 [1 + (m_v + n\beta) (p - p_0)] \quad (8)$$

che sostituita nella (2), dopo aver posto

$$S_u = (m_v + n\beta) \rho g \quad (9)$$

dà

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}_f) = 0 \quad (10)$$

La (7) e la (8) definiscono completamente il problema del deflusso delle acque nei mezzi porosi, pertanto l'equazione che lo governa, nelle ipotesi abbastanza generali prima menzionate è

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div} \left[\rho K \text{grad} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

la quale, tenuto conto della eventuale presenza di pozzi o sorgenti (nel senso matematico, cioè puntuale) assume la forma più generale

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\rho K \operatorname{grad} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = q' \rho$$

che può essere scritta nella forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho K_x \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\rho K_y \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\rho K_z \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = \\ = \rho q' - \frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

2. L'idraulica adattata alle falde delle pianure alluvionali

In generale gli acquiferi delle pianure alluvionali hanno uno spessore (potenza) molto inferiore alla lunghezza e larghezza dei depositi.

In tali condizioni si può assumere che la velocità abbia componenti solo sul piano definito dalle dimensioni maggiori e quindi nulla nella direzione dello spessore. Se fissiamo quindi una terna cartesiana ortogonale con gli assi x e y nel piano contenente le componenti non nulle del vettore velocità (di filtrazione) e l'asse z ortogonale ai precedenti verso l'alto, avremo che $V_{f,z}$ sarà nullo con le sue derivate prime e seconde.

In tali condizioni, integrando l'equazione indefinita lungo il segmento verticale di altezza e (x, y, t) (dove e è la potenza della falda) e tenendo conto che

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\rho K_z \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = 0 \quad (13)$$

avremo (*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho K_x e \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\rho K_y e \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = \rho q - \frac{S_u e}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (14)$$

(*) Infatti se $V_{f,z}$ è nullo con le sue derivate, allora

$$h + \frac{p}{\gamma}$$

è costante lungo l'asse z , per cui:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

dove q rappresenta gli emungimenti o le immisioni da un pozzo (matematico) segmentale di traccia puntuale sul piano x, y .

Ponendo ora

$$\begin{aligned} H(x, y, t) = h + \frac{p}{\gamma} ; \quad T_x = e K_x ; \\ T_y = e K_y ; \quad S = S_u e \end{aligned}$$

e tenendo conto che ρ è costante nello spazio (varia solo t) la (14) diviene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right] = q - S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (15)$$

che è ancora un'equazione parabolica che, note le condizioni iniziali e quelle al contorno, risolve nelle ipotesi poste il problema del flusso nelle falde delle pianure alluvionali.

Nell'ipotesi aggiuntiva che il moto sia permanente, cioè che sia

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

la (15) diviene un'equazione di tipo ellittico e abbisogna per essere definita delle sole condizioni al contorno.

3. Le condizioni al contorno

Possono verificarsi tre diversi casi di condizione al contorno, in funzione della natura della frontiera stessa e delle nostre conoscenze sul flusso idrico attraverso essa.

a) La più semplice delle condizioni alla frontiera è data dalla conoscenza su di essa (o su una sua parte) del valore della piezometria. È la classica condizione di Dirichlet detta impropriamente di «potenziale noto».

Matematicamente si esprime assegnando la funzione

$$H = H(P_{(x,y)})$$

dove $P_{(x,y)} \in F$ con F frontiera del dominio

b) Il più delle volte il «potenziale» lungo il bordo non è noto. Può essere noto, invece, il valore della portata che attraversa la frontiera stessa. In particolare quando questa è costituita da terreni impermeabili il valore della portata per la frontiera sarà nullo.

Indichiamo con \vec{n} il versore normale esterno al bordo e detto α l'angolo tra detto versore e l'asse delle x , avremo:

$$V_{f,x} \cos \alpha + V_{f,y} \sin \alpha = \frac{dQ^*}{eds} \quad (16)$$

con dQ^* portata fluente attraverso la superficie di bordo di base ds ed altezza e . Tenendo presente la (6) e ponendo

$$q^* = \frac{dQ^*}{ds}$$

segue la

$$T_x \cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + T_y \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y} = q^* \quad (17)$$

Nel caso in cui q^* sia noto (ed in particolare nullo), come nel caso in esame, la (17) è la classica condizione al contorno di Neumann.

c) Su alcuni tratti di bordo, per esempio di frontiera con altri acquiferi, può non verificarsi nessuno dei due casi precedenti. Da un punto di vista matematico il problema non è in generale determinato.

4. Discretizzazione alle differenze finite

L'impossibilità di risolvere analiticamente le (15) con le relative condizioni al contorno su domini affatto generali impone la ricerca di soluzioni approssimate.

Queste, come è noto, possono essere ricercate con vari metodi, tra questi qui si fa riferimento al metodo delle differenze finite. Allo scopo si sovrappone al dominio, fig. 1, una rete a maglia quadrata (l'uso di maglie diverse è possibile) e si sostituisce nella (15) al posto dei simboli di derivazione quelli del rapporto incrementale. Ne segue che per ciascuna maglia i, j avremo una equazione del tipo

$$\Delta(-\bar{T}_x \Delta H) + \Delta(-\bar{T}_y \Delta H) = q_{i,j} \Delta x^2 - \frac{S_{i,j} \Delta x^2}{\Delta t} (H_{i,j}^n - H_{i,j}^{n-1}) \quad (18)$$

dove il soprassegno sulle T sta a significare che queste rappresentano la media dei valori

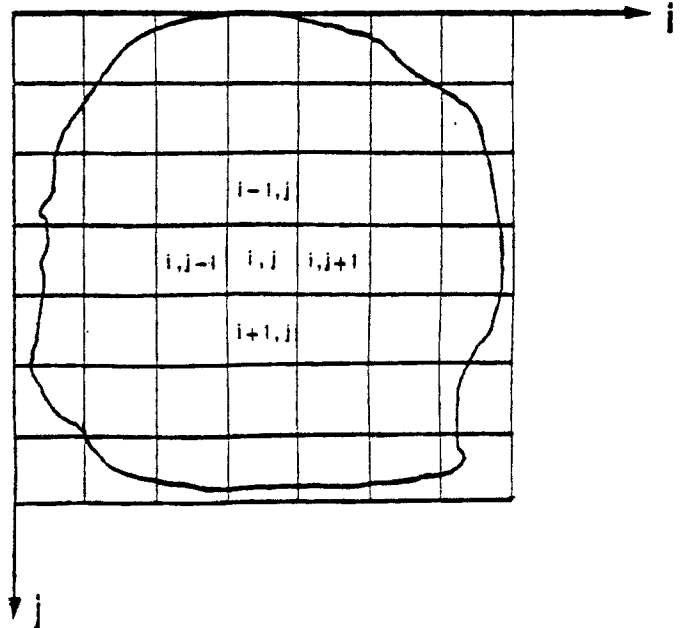


Fig. 1.

delle trasmissività relative alle maglie di cui si eseguono le differenze ΔH . Posto poi

$$Q_{i,j} = q_{i,j} \Delta x^2 \quad \text{e} \quad C_{i,j} = \frac{S_{i,j} \Delta x^2}{\Delta t}$$

ed esplicitando le differenze a primo membro che ovviamente vanno calcolate tra le quattro maglie che la circondano e la i, j -esima, avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{x_{i,j-1}} + T_{x_{i,j}}}{2} H_{i,j-1} + \frac{T_{x_{i,j+1}} + T_{x_{i,j}}}{2} H_{i,j+1} + \\ & + \frac{T_{y_{i-1,j}} + T_{y_{i,j}}}{2} H_{i-1,j} + \frac{T_{y_{i+1,j}} + T_{y_{i,j}}}{2} H_{i+1,j} - \\ & - \frac{T_{x_{i,j-1}} + T_{x_{i,j+1}} + T_{y_{i-1,j}} + T_{y_{i+1,j}} + 2 \cdot}{2} \\ & \frac{(T_{x_{i,j}} + T_{y_{i,j}})}{2} H_{i,j} = -Q_{i,j} + \\ & + C_{i,j} (H_{i,j}^n - H_{i,j}^{n-1}) \quad (19) \end{aligned}$$

Il primo membro della (19) presenta cinque incognite, esattamente la H relativa alla maglia

per cui è stata scritta l'equazione e le H relative alle maglie circostanti, queste ultime hanno per coefficienti la media dei valori delle trasmissioni delle maglie interessate. Il coefficiente della H relativa alla maglia di cui si scrive l'equazione è pari all'opposto della somma degli altri coefficienti del primo membro della stessa equazione.

5. Le condizioni al contorno in termini di differenze finite

Per il primo dei casi esaminati nel paragrafo 3, maglia di bordo con potenziale noto (o condizione di Dirichlet), è ovviamente inutile scrivere l'equazione. Le implicazioni della presenza di una maglia a potenziale noto sono tutte nelle equazioni relative alle maglie che la circondano e contribuiscono a fornire i termini noti del sistema che vanno portati al secondo membro. Per il secondo caso, cioè per maglie di bordo a flusso noto (o condizione di Neumann) andrà scritta la (19) che conterrà, però, a primo membro solo tante incognite quante sono le maglie del dominio che ne sono a contatto ed il coefficiente dell'incognita relativa alla maglia stessa sarà ancora pari all'opposto della somma degli altri coefficienti.

Ciò impone automaticamente la condizione al contorno nel caso che il flusso noto sia nullo, infatti con riferimento alla fig. 2 dove supponiamo che la maglia 3,4 abbia sul lato (a, b) flusso nullo, tenuto presente che

$$\cos \alpha = -1 \quad ; \quad \sin \alpha = 0$$

dalla (16) segue la

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \text{ e discretizzando } \frac{\Delta H}{\Delta x} = 0$$

$$\text{da cui } H_{2,4} - H_{3,4} = 0$$

e facendo sistema tra quest'ultima e la (18), dopo aver introdotto la maglia fittizia (2,4), nell'ipotesi — non necessaria — di isotropia:

$$\frac{T_{3,3} + T_{3,4}}{2} (H_{3,3} - H_{3,4}) + \frac{T_{3,5} + T_{3,4}}{2}$$

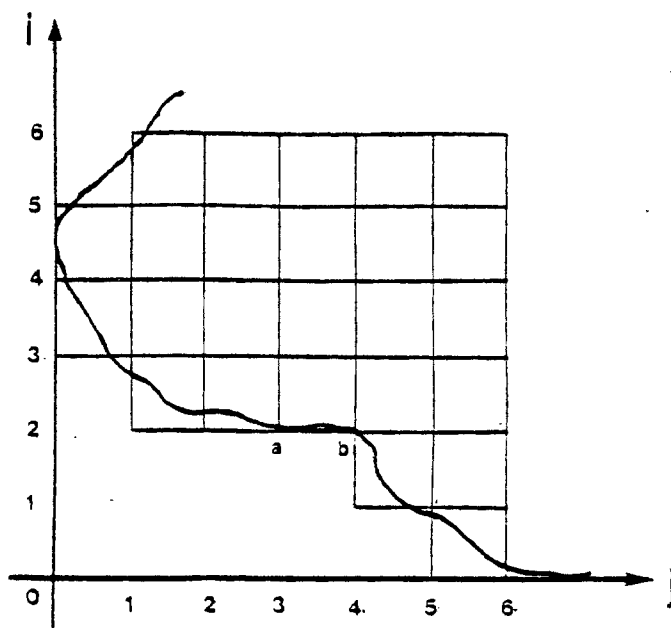


Fig. 2

$$\begin{aligned} & \cdot (H_{3,5} - H_{3,4}) + \frac{T_{4,4} + T_{3,4}}{2} (H_{4,4} - H_{3,4}) + \\ & + \frac{T_{2,4} + T_{3,4}}{2} (H_{2,4} - H_{3,4}) = Q_{3,4} - \\ & - C_{3,4} (H_{3,4}^n - H_{3,4}^{n-1}) \end{aligned} \quad (20)$$

segue che si annulla l'ultimo addendo del primo membro. Allo stesso risultato si perviene se, anziché introdurre la maglia fittizia (il che comporta la scrittura di una equazione in più) si annulla il relativo coefficiente, cioè

$$\frac{1}{2} (T_{2,4} + T_{3,4}) = 0$$

dalla quale si deduce che

$$T_{2,4} = -T_{3,4}$$

ed in conseguenza la (19) per la maglia in esame diventa

$$\begin{aligned} & \frac{T_{3,3} + T_{3,4}}{2} H_{3,3} + \frac{T_{3,5} + T_{3,4}}{2} H_{3,5} + \\ & + \frac{T_{4,4} + T_{3,4}}{2} H_{4,4} + \frac{T_{3,3} + T_{3,5} + T_{4,5} + 3T_{3,4}}{2} \\ & \cdot H_{3,4} = Q_{3,4} + C_{3,4} (H_{3,4}^n - H_{3,4}^{n-1}) \end{aligned} \quad (21)$$

e ciò dimostra l'asserto.

... il flusso noto è non nullo basterà che
... (19) nella forma già vista per il caso di
... nullo, si aggiunga al termine Q_{ij} il flusso
... . Ciò si prova in maniera analoga a quanto
... e il flusso nullo. Il metodo di utilizzare
... maglia fittizia è riconducibile al noto me-
... delle immagini.

6. Sintesi matriciale

Tutte le equazioni che gestiscono in termini finiti il deflusso delle acque sotterranee sono lineari nelle N incognite H . Se ora pensiamo di scrivere ciascuna delle M equazioni che compongono il sistema con tutte le M incognite, ordinandole, per tutte le equazioni sempre nello stesso modo, e ciò evidentemente si otterrà ponendo in ciascuna equazione pari a zero i coefficienti delle incognite che nelle equazioni originarie non vi compaiono potremmo raggruppare i coefficienti dei primi membri in una matrice quadrata di ordine $M \times M$ che indicheremo con A ed in cui generico elemento sarà $a_{m,n}$.

Indichiamo poi con X il vettore colonna delle incognite, siano esse di tipo H o Q^* .

Inoltre indichiamo con B il vettore colonna costituito dai termini noti e con C la matrice (diagonale) dei coefficienti delle incognite a secondo membro.

Il sistema potrà dunque essere sintetizzato nella espressione matriciale

$$AX = B + C(X^n - X^{n-1}) \quad (27)$$

La matrice A gode delle seguenti proprietà:

I. È una matrice sparsa (cioè con molti termini nulli) infatti i coefficienti diversi da zero sono al più cinque, e tenendo conto che in generale

$$M \gg 5$$

segue l'asserto.

II. Ha diagonale principale dominante, infatti i coefficienti del tipo

$$a_{i,i}$$

sono in valore assoluto molto maggiori degli altri, ed in particolare sussiste la relazione

$$|a_{i,j}| = \sum_{j=1}^M |a_{i,j}|$$

III. È simmetrica, cioè $i \neq j$

$$a_{m,n} = a_{n,m}$$

La X che compare a primo membro della (27) può, nella logica delle differenze finite assumere il valore al tempo t_n od al tempo t_{n-1} od ad un tempo intermedio tra i due.

In particolare se si ammette che ciascuna delle $X = X(t)$ ha sufficienti caratteristiche di regolarità e ciò evidentemente si verifica tanto più facilmente quanto più piccolo è Δt , allora avremo che

$$X = (1 - \theta) X^{n-1} + \theta X^n \quad (28)$$

con θ (scalare) tale che sia soddisfatta la

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Ne segue che per:

$\theta = 1$ X assumerà il valore all'istante t_n (metodo implicito)

$\theta = 0$ X assumerà il valore all'istante t_{n-1} (metodo esplicito)

$0 < \theta < 1$ X assumerà un valore intermedio a quello relativo ai tempi t_n e t_{n-1}

Sostituendo ora la (28) nella (27) ed ordinando, segue la

$$DX = E \quad (29)$$

dove si è posto

$$D = A\theta - C \quad \text{ed} \quad E = B - [A(1 - \theta) + C] X^{n-1} \quad (30)$$

la cui risoluzione dà soluzione al problema non-stazionario del moto delle acque filtranti.

È facile verificare che la matrice D gode delle stesse proprietà della matrice A .

Simboli adottati

P	punto generico del mezzo fluido (e/o del mezzo poroso)
p	pressione nel punto P
h	altezza di P su un piano orizzontale fisso di riferimento
\vec{V}	velocità (vettore) in P
γ	peso specifico in P
ρ	densità in P
μ	viscosità del fluido in P
β	comprimibilità del fluido in P
n	porosità
V_v	volume dei vuoti
V_s	volume nei solidi
V_f	velocità di filtrazione (vettore)
V_f	modulo della velocità di filtrazione
$V_{f,i}$	componente della velocità di filtrazione lungo l'asse i
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	versori di una terna cartesiana ortogonale
K	permeabilità
S_u	coefficiente di immagazzinamento unitario
S	coefficiente di immagazzinamento
i, j, k	indici, rispettivamente, degli assi x, y, z
y_i	asse generico
q'	portata del pozzo o della sorgente matematica puntiforme
q	portata del pozzo o della sorgente matematica lineare
Q^*	portata fluente dal bordo
q^*	portata unitaria fluente dal bordo
$Q_{i,j}$	portata del pozzo della i - j -esima maglia
H	potenziale
T	trasmissività
e	potenza della falda
Δt	intervallo di tempo
m_v	comprimibilità del mezzo poroso

Equazioni del flusso delle acque sotterranee e loro riduzione alle differenze finite con le relative condizioni al contorno

Bibliografia

- CHAVETEAU & THERRIOT (1976) - *Régime d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de Darcy*. La Houille Blanche vol. 2.
- SCHNEEBELI (1966) - *Hydraulique souterraine*. Eyrolles - Paris
- VALLENTINE (1969) - *Applied hydrodynamics*. Butterworths
- REMSON, HORBERGER & MOLZ (1971) - *Numerical methods in surface hydrology*. Wiley - Interscience.
- PALUMBARINOVA KOCHINA (1962) - *Theory of groundwater movement*. Princeton University press.
- TODD (1959) - *Groundwater hydrology* - Wiley.
- HAAR (1962) - *Groundwater and seepage*. Mc Graw - Hill book Company.
- DOMENICO (1972) - *Concepts and models in groundwater hydrology*. Mc Graw - Hill book Company.
- HUISMAN (1972) - *Groundwater recovery* - Mc Millan Press.