

# Dispense di **COSTRUZIONI IDRAULICHE**

redatte dal  
**prof. Ing. Ignazio Mantica**  
17-10-1946 † 04-08-1995

**il materiale presente in questo file viene riportato così come lasciato da Ignazio Mantica alla data della sua scomparsa, pertanto può risultare incompleto.**

**Questo materiale viene pubblicato nella speranza che il frutto di anni di lavoro svolto con passione ed impegno non vada perso e possa essere ancora utile a quanti lo vorranno.**

**Siete liberi di usare i testi e le immagini presenti in questo documento come meglio credete, vi chiediamo soltanto di citarne la fonte.**

**- GRAZIE -**

**Università degli Studi di Ancona  
Istituto di Idraulica**

prof.ing. Ignazio MANTICA

Lezioni di:

**COSTRUZIONI IDRAULICHE**

**CAP IV**

**OPERE IDRAULICHE SINGOLE**

**parte V**

**DIGHE e TRAVERSE**

appunti tratti dalle lezioni tenute nell' A.A. 1992/93

## Indice

1.	Generalità.....	5
2	Cenni storici .....	6
3	I vari tipi di dighe.....	9
4.1	Le dighe a gravità massicce .....	12
4.1.1	Predimensionamento delle dighe a gravità massiccia.....	15
4.1.2	Le questioni costruttive per le dighe a gravità massicce .....	25
4.1.2.1	Il corpo delle dighe in calcestruzzo massiccio .....	25
4.1.2.2	I Calcestruzzi .....	35
4.1.2.3	I giunti di dilatazione e cenni sui problemi di filtrazione .....	36
4.1.2.4	Cenno sui problemi di fondazione.....	40
4.1.3	Elementi per la verifica statica delle dighe a gravità .....	41
4.1.3.1	Le varie forze in gioco .....	41
4.1.3.2	Lo studio dello stato tensionale .....	42
4.1.3.2	Limitazioni dell' altezza delle dighe massicce dovute allo stato tensionale .....	49
4.1.4	Approfondimento circa lo stato tensionale delle dighe massicce.....	52
4.1.4.1	Richiami sugli stati piani di deformazione e di tensione .....	53
4.1.4.1.1	Risoluzione del problema dell' equilibrio elastico in termini di spostamenti.....	59
4.1.4.1.2	Risoluzione del problema dell' equilibrio elastico in termini di tensioni .....	63
4.1.4.2	Equazioni dell'equilibrio elastico dei sistemi piani.....	65
4.1.4.4	La funzione di Airy .....	67
4.1.4.5	Applicazione della funzione di Airy alle dighe .....	68
4.1.5	L'andamento temporale dei lavori.....	69
4.2	Le dighe a gravità alleggerite .....	70
4.3	Dighe ed archi multipli .....	77
4.3.1	Approfondimento di predimensionamento.....	77
4.3.2	Suddivisione in conci di egual peso elastico .....	84
5	Le dighe ad arco .....	86
5.1	Le possibili varianti morfologiche delle dighe ad arco .....	87
5.3.2.1	Ulteriori elementi sul predimensionamento delle dighe ad arco (teoria del Guidi).....	93
5.3.2.2	Ulteriori elementi sul predimensionamento delle dighe ad arco (teoria del Ritter).....	97
6	Dighe ad arco-gravità.....	99
7	Dighe in materiale sciolto .....	101
7.1	Dighe in terra.....	102
7.1.1	Considerazioni geometriche.....	102
7.1.2	Considerazioni costruttive .....	103
7.2	Verifica di stabilità delle dighe in terra.....	107
7.3	Dighe in pietrame.....	108
7.4	Elementi per la verifica statica delle dighe in pietrame.....	110
7.4.1	Elementi di predimensionamento .....	110
7.4.2	Verifiche di stabilità .....	113
8	Le traverse .....	114
9	Cenni sugli organi di presa e di intecettazione e gli organi di scarico .....	115

9.1	Gli organi di presa e di intercettazione.....	115
9.2	Gli organi di scarico.....	115
9.2.1	Gli scarichi di fondo e di mezzofondo (scarichi sotto battente).....	116
9.2.2	Gli scarichi di superficie.....	116
APPENDICE 1	D.M. 24/3/1982 - Norme tecniche per la progettazione e la costruzione delle dighe di sbarramento.....	121
<b>CARATTERISTICHE GENERALI STRUTTURALI E</b>		
<b>COSTRUTTIVE VERIFICHE DI SICUREZZA.....</b>		
A	CLASSIFICAZIONE E DEFINIZIONI.....	121
A.2	Definizioni.....	122
B	NORME GENERALI.....	123
B1	Ampiezza massima delle onde nel serbatoio.....	123
B3	Verifiche di sicurezza.....	124
B4.	Azioni sismiche.....	124
a.	Azioni inerziali della massa strutturale.....	124
b.	Azioni inerziali dell' acqua invasata.....	125
c)	Quota massima di invaso da considerarc.....	126
B.5	Controlli del comportamento dell'opkra - Osservazioni e misure.....	126
C	DIGHE MURARIE IN GENERALE.....	128
C1	Fondazione.....	128
C2	Cemento - Calcestruzzo.....	128
C3	Getti e controlli del calcestruzzo.....	129
C4.	Azioni agenti sulla struttura.....	130
a)	Spinta del ghiaccio.....	130
b	Azioni sismiche.....	130
c)	Sollospine nelle verifiche allo scorrimento.....	131
C.5	Prove su modello.....	131
C6	Disposizioni particolari strutturali e costruttive.....	132
a	Franco e coronamento.....	132
b	Cunicoli d'ispesione e drenaggi.....	132
D	DIGHE A GRAVITA ORDINARIE.....	133
a	Caratteristiche. verifiche di sicurezza.....	133
b	Verifiche di stabilità allo scorrimento.....	133
c	Verifica di resistenza.....	133
E	DIGHE A SPERONI E A VANI INTERNI.....	135
E1	Caratteristiche generali e uerifiche di sicurezza.....	135
E.2	Caratteristiche particolari di forma. Giunti permanenti. Zoccolo. Superfici di fondazione.....	135
E	DIGHE A VOLTA.....	137
F1	Caratteristiche generali e tipi particolari.....	137
F2	Verifiche di sicurezza.....	137
G	DIGHE A VOLTE O A SOLETTE POGGIATE SU CONTRAFFORTI.....	139
G1	Caratteristiche generali.....	139
G2	Verifiche di sicurezza.....	139
H	DIGHE DI MATERIALI SCIOLTI.....	140
H3	Disposizioni strutturali particolari.....	141
H4.	Franco. Larghezza di coronamento. Organi di scarico.....	141
H5	Verifiche di sicurezza.....	142
H.6	Disposizioni particolari per le opere ubicale in zone ritenute soggette a sismi.....	143
H7.-	Sbarramenti di tipo misto.....	144

I)	SBARRAMENTI DI LAMINAZIONE DELLE PIENE.....	145
L)	TRAVERSE FLUVIALI .....	145
M)	SBARRAMENTI DI TIPI VARI .....	145
APPENDICE 2	Richiami sulla teoria dell' ellisse di elasticità.....	146
1	Generalità.....	146
2	Corrispondenza fra le rette delle forze e i centri di rotazione .....	147
3	L' ellisse di elasticità .....	151
3 1	Rotazioni e spostamenti provocati da coppie e forze .....	153
3 2	Sintesi delle relazioni tra sollecitazioni e deformazioni .....	156
3 3	I teoremi di Culmann.....	156
4	Considerazioni per la determinazione dell' ellisse di elasticità.....	160
5	L'utilità della teoria dell'ellisse di elasticità .....	162
6	Nuova formulazione dei teoremi di Culmann .....	164
2 3	Travi a parete piena e caratteristiche elastiche di un tronco prismatico .....	168

## 1. Generalità

E' ben nota l'accezione comune del termine diga.

Tale termine deriva dall' olandese *dijk* usato per indicare gli argini che difendevano le terre litoranee dal mare. Da tale termine la derivazione francese antica di *dique* e l'attuale di *digue*.

Sostanzialmente quindi l'origine del termine é riferito ad opere non di sbarramento di corsi d'acqua bensì alle classiche difese dal mare dei "paesi bassi".

Oggi l'accezione si é dunque allargata e comprende non solo le dighe tipo quella famosa dell' Ijssel Meer che separa i bacini interni olandesi dal Mar del Nord ma anche gli sbarramenti fluviali. Ancora dighe sono poi chiamate le opere esterne di difesa portuali.

Noi, in quanto segue, faremo esclusivo riferimento alle opere di sbarramento fluviale.

Le dighe o grandi dighe si differenziano dalle traverse sostanzialmente per :

- a) scopo per il quale vengono costruiti;
- b) dimensioni.

Le dighe servono per invasare notevoli quantità d'acqua e quindi per costituire dei serbatoi , di contro le traverse servono per costituire un certo tirante d'acqua e permettere una più agevole derivazione dal corso d'acqua naturale.

Conseguentemente a questa distinzione basata sulle funzioni ne segue un'altra basata sulle dimensioni.

Infatti le dighe in generale hanno notevole altezza mentre le traverse, si limitano in altezza a quel tanto che é necessario per garantire il voluto "salto" ed il tirante necessario alla deviazione dell' acqua.

## 2 Cenni storici

Si è già avuto modo di ricordare che da sempre l'uomo ha utilizzato le acque fluviali per le proprie necessità idropotabili, agricole ed energetiche.

Indubbiamente quando le quantità d'acqua necessarie sono ingenti, la diga (o la traversa) è lo strumento più naturale per derivarle.

Già 4000 anni or sono gli Egizi ( ma analoghe costruzioni furono realizzate in Mesopotamia, in Cina ed in India) realizzarono delle dighe, sia allo scopo di derivare acqua che di proteggere terreni dalle esondazioni fluviali.

Circa al 2700 a.c. risale la costruzione della diga di Sadd el-Kafara, in Egitto, le cui rovine sono ancora visibili. Trattasi di una diga in rock-fill , sul Nilo, circa 30 Km a monte del Cairo alta 11 metri e lunga 106.

Circa 1000 anni a.c. gli Assiri realizzarono uno sbarramento sul Tigri presso Samarra ed altri in Mesopotamia per derivare le acqua dagli importanti fiumi di queste regioni. Le dette costruzioni erano in pietra.

Al 700 a.c. circa risale la realizzazione di una diga sul Tigri per l'alimentazione della città di Ninive.

L'imperatore cinese Yau intorno al 2280 a.c. fece realizzare una diga ed un canale per scopo potabili ed irrigui.

Il sistema irriguo del Tukiangyien realizzato 300 anni prima di Cristo, sempre in Cina comprendeva diverse dighe sul fiume Min.

In Giappone, intorno al 162 d.c. fu costruita, presso Nara, la diga di Kaerumataike alta 17 metri

Anche in Pakistan, in India, nel Banga Desh ed a Ceylon (odierna Sri Lanca) furono realizzate nel passato importanti dighe, proprio in Ceylon , nel quarto secolo a.c. fu realizzata una diga larga ben 18 km ed alta 21 metri.

Nel regno di Saba (odierno Yemen) fu costruita una diga nel 750 a.c.

Trattavasi ovviamente sempre di opere in terra od in pietrame (rock-fill).

Ma si era già avuto anche qualche caso di diga in muratura: è del 1870 a.c. la realizzazione in India della diga del Khadakwasla, realizzata appunto con tale tecnica.

Gli antichi romani non furono da meno e realizzarono un complesso sistema di dighe in muratura in Libia per il rifornimento idrico di città (quali Leptis Magna) e per contrastare l'erosione del suolo.

La più grande diga romana fu quella di Cornalido a Nord di Merida, nella Spagna meridionale, alta sino a 23 metri e lunga 183.

Dalla caduta dell' impero romano occorre fare un salto all' epoca rinascimentale per tornare alla costruzione di dighe.

Tra le più significative di quest'epoca é certamente quelle dell' Alicante (1959) alta 41 metri (sempre in Spagna) realizzata a scopi irrigui e di Tibi, sempre in Spagna, alta 46 metri però del 19-esimo secolo.

Dal 19-esimo secolo l'ingegneria europea si dedica allo studio scientifico delle dighe ed importanti studi si devono a scienziati quali:

- De Sazilly M. , francese, nel 1853;
- Rankine, scozzese;
- Levj (Maurice<sup>1</sup>), francese, nel 1895
- Mohr C.O.<sup>2</sup>, tedesco

che pongono le basi scientifiche per lo studio dello stato tensionale delle dighe in muratura a gravità.

La prima diga costruita su tali basi scientifiche e quella di Furens (1866) in Francia alta 52 metri.

Agli inizi del 20-esimo secolo (1904) viene costruita la diga di Cheesman alta 72 metri ed il massimo di altezza é raggiunto, oggi, dalla diga "Grande Dixence" del 1962 alta 284 metri.

Importanti contributi circa le dighe a gravità alleggerite sono dati da studiosi italiani quali il Castigliano<sup>3</sup> e l'ing. Claudio Marcello, progettista della classico schema che da lui prende il nome.

E' all' ingegnere francese André Coyne (1891-1960) che si devono i primi studi sulle dighe ad arco il cui spessore varia dal 15 al 20% dell' altezza, rispetto al quasi 80 % delle dighe a gravità ed al 60% delle dighe a gravità alleggerita.

In questo breve excursus storico non si possono non citare importanti contributi italiani più recenti quali quelli di Oberti, Contessini, Arredi.

---

<sup>1</sup> Trattasi di Maurice Levy (nato a Ribeoville in Alsazia nel 1838 e morto a Parigi nel 1910). I Levy, come d'altraparte i Bernouilli sono una numerosa famiglia di scienziati nel campo della matematica e della fisico-matematica.

<sup>2</sup> Cristian Otto Mohr (nato a Wesselburen, Holstein 1835 morto a Dresda nel 1918), Ingegnere ferroviario, prima, poi professore dal 1877 al politecnico di Stoccarda, ben noto per la rappresentazione grafica dello stato tensionale che da Lui prende il nome (1882).

<sup>3</sup> Carlo Alberto Castigliano, Asti 1847-Milano 1884, ingegnere ferroviario, fu uno dei fondatori della teoria dell' elasticità. A lui si devono, oltre al ben noto teorema che porta il suo nome anche la "Nuova teoria sui sistemi elastici" del 1875, la "Théorie de l'équilibre des systèmes élastique et ses applications" del 1881 ed ancora la "Teoria delle molle" del 1884.



Oggi vi é un importante ritorno alle dighe in materiali sciolti, sia per questioni morfologiche che per questioni di impatto ambientale.

### 3 I vari tipi di dighe

Occupiamoci dapprima delle dighe.

Da un punto di vista costruttivo morfologico esse possono essere distinte, secondo il regolamento italiano vigente<sup>4</sup>, in:

- 1) a gravità
  - 1.1 massiccia
  - 1.2 alleggerite
- 2) ad arco
  - 2.1 a volta
  - 2.2 ad arco gravità
  - 2.3 a cupola
- 3) in materiali sciolti
  - 3.1 in terra
  - 3.2 in muratura a secco
  - 3.3 in pietrame alla rinfusa (Rock-fill o scogliere)
- 4) sbarramenti di tipo vario
- 5) traverse

In questa sede non ci occuperemo degli "*sbarramenti di tipo vario*" ma solo dei primi tra tipi. Mentre un capitolo a parte sarà dedicato alle traverse

Le dighe a gravità, sia massicce che alleggerite reagiscono alle sollecitazioni cui sono sottoposte (per esempio: spinta delle acque, sottopressioni, ecc...) solo tramite proprio peso.

Evidentemente per questo tipo di diga ha molta importanza il piano di appoggio cioè di fondazione) che deve essere stabile e compatto, in modo da sopportare le sollecitazioni che la diga trasmette.

---

4 Le attuali Norme sono state approvate con D.M. 24/3/1982 che ha sostituito quello del 1957.

Questo, a sua volta ha sostituito un precedente regolamento del.1/11/1959 DPR n. 1363

Le norme del 1982 sono riportate integralmente nell' appendice I.

Ad esse corrispondono grandi volumi di calcestruzzo, in genere dello stesso ordine di grandezza (o di ordine di grandezza immediatamente inferiore) rispetto alla quantità d'acqua invasabile a monte

Di contro le dighe ad arco sono estremamente meno onerose richiedendo quantità di calcestruzzo di ordine decisamente inferiore, di contro richiedono che le pareti laterali della gola da sbarrare siano di idonee caratteristiche meccaniche, compattezza e stabilità.

Inoltre la gola deve essere di dimensioni contenute in modo da:

- 1 mantenere il raggio entro valori accettabili
- 2 non rubare all' acqua molto spazio (cioè non diminuire la quantità d'acqua invasabile con la cupola

Quando i terreni di fondazione non sono rocciosi si fa ricorso a dighe in materiali sciolti, soprattutto a dighe in terra. Ma opportune condizioni geomorfologiche e di reperibilità del materiale possono consigliare dighe in pietrame.

La scelta del tipo di diga è funzione quindi del tipo di terreno su cui si deve fondare, segue da qui la necessità di una accurata indagine geotecnica.

I metodi per eseguire questa indagine possono essere diretti od indiretti.

Il metodo diretto, che dà maggiori garanzie, esso consiste nello scavare dei pozzi e delle gallerie per assicurarci direttamente sul tipo di terreno.

In questo modo potremmo rilevare l'esatta composizione stratigrafica del terreno sottostante.

Il metodo diretto consiste nell'estrazione di carote tramite sondaggi, con questo metodo occorre procedere con cautela per non disturbare i campioni durante l'estrazione.

Un' altro metodo indiretto è quello che si basa sulla geofisica, in particolare possiamo ricorrere a sondaggi geo-elettrici, essi si basano sulla diversa conducibilità delle rocce, i risultati si analizzano con dei grafici ricavati sperimentalmente per i diversi tipi di roccia.

Un'altro metodo geofisico è quello della sismica. I sondaggi sismici possono essere del tipo a riflessione o a rifrazione e possono essere eseguite con sollecitazioni del terreno superficiali od in foro.

Per una buona conoscenza del terreno di fondazione è opportuno associare tra loro i detti metodi di indagine senza tralasciare le indagini geologiche di superficie con rilevamento di superfici di scorrimento, faglie ecc...

Qui non ci soffermiamo oltre lasciando, chi voglia approfondire l'interessante argomento, ai specifici corsi (geotecnica e/o tecnica dei sondaggi) e testi sull' argomento.

Assicurati, con uno o più dei metodi sopra visti circa la bontà del terreno su cui vogliamo fondare, ci proponiamo ora il problema di dimensionare la diga.

## 4.1 Le dighe a gravità massicce

E' chiaro che in un corso di acqua i terreni che si possono trovare sono vari: roccia, terreni alluvionali, depositi morenici, ecc..

La diga a gravità si può fare solo nel caso che il terreno di fondazione sia costituito da roccia compatta, cioè che il deposito alluvionale, in genere sempre presente sui fondi alveo, sia di modesto spessore (qualche metro) e sotto vi sia della roccia compatta

Bisogna sempre scoprire la roccia compatta per impostare la diga, di norma é opportuno un rinforzo (consolidamento) del terreno di fondazione, cioè della detta roccia compatta tramite opportune iniezioni consolidanti.

In fase pre-progettuale si imposta il così detto profilo teorico della diga

Sia  $h$  l'altezza teorica della diga e a questa assegnamo come profilo teorico un profilo triangolare con base incognita di larghezza  $b$  detto profilo e detto **profilo fondamentale**.

Per  $h$  è minore di 30÷35 [m] il parametro a monte può essere verticale mentre per  $h$  maggiore di 35 [m] il parametro a monte deve essere inclinato.

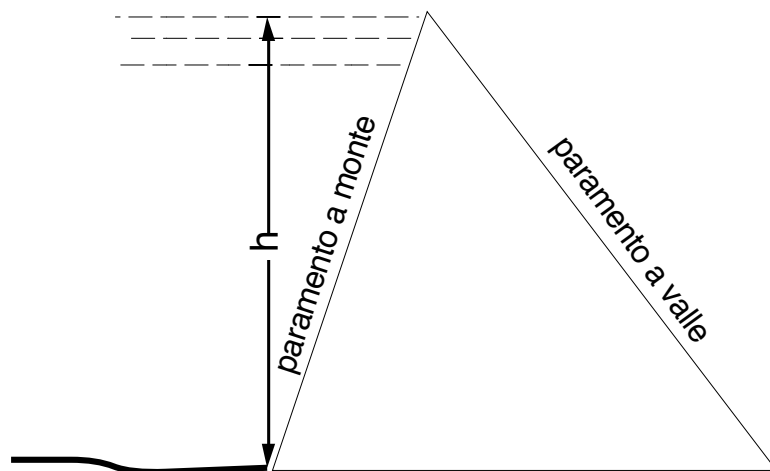


Fig. 1 - profilo teorico di una diga a gravità massiccia

Questo profilo, solo teorico, non é certo quello che poi verrà realizzato, infatti é necessario completarlo sia in testa (coronamento) che alla base (fondazione).

Occupiamoci ora del coronamento.

Il profilo teorico oltre che per motivi costruttivi e logistici, deve essere opportunamente rinforzato sul coronamento anche per motivi statici.

Peraltro il coronamento è necessario anche per impedire che la diga venga trascinata, in condizioni di emergenza, dall'acqua.

Per regolamento il coronamento deve avere un'altezza minima pari ad 1 m. sino ad un valore massimo dai 3 ai 5 m a seconda dell' importanza della diga.

Infatti il coronamento deve essere fatto in modo tale che il moto ondoso non sorpassi la diga mentre la larghezza del coronamento è legata all'importanza dell' opera.

Inoltre il coronamento deve essere tale da costituire un passaggio tra le due sponde che sempre a seconda dell'importanza dell'opera può essere pedonale a praticabile con mezzi meccanici.

Il coronamento si raccorda con la paratoia esterna con la seguente costruzione.

Dall'estremo  $A_0$  si abbassa la verticale sino a B, quindi si ribalta AB in BC, si fa centro col compasso in O (punto di intersezioni delle normali in A e C).

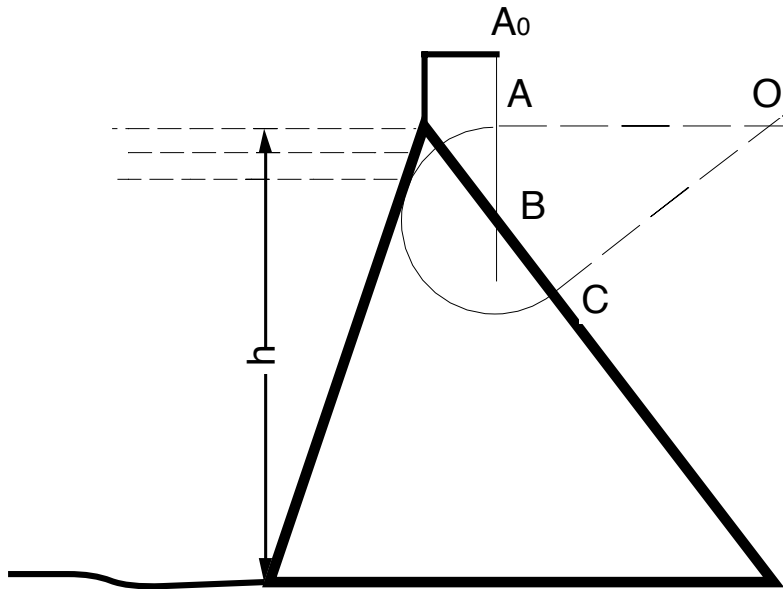


Fig. 2 - costruzione del profilo del coronamento di una diga a gravità massiccia

Si raccordano quindi A e C con l'arco di cerchio con centro in O

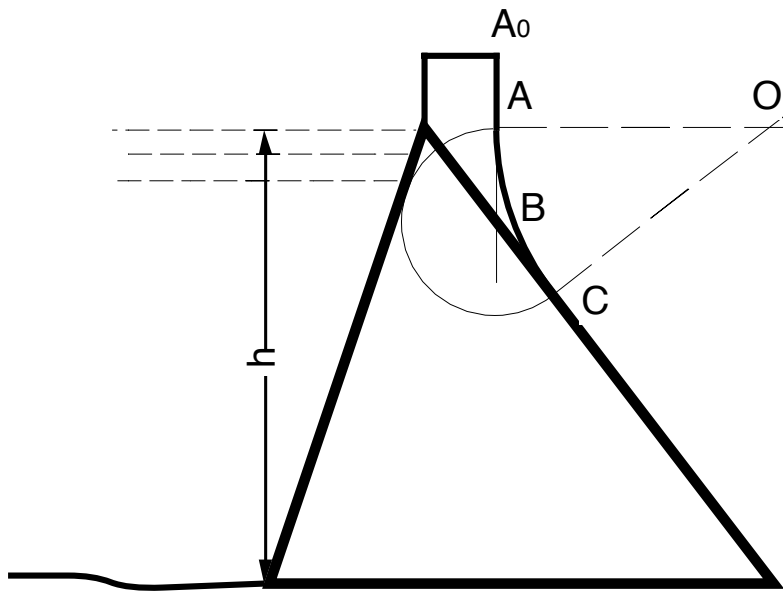


Fig. 3 - Costruzione per il completamento del profilo di una diga a gravità massiccia con il coronamento

#### 4.1.1 Predimensionamento delle dighe a gravità massiccia

Le forze principali che agiscono sulla diga il cui schema di predimensionamento è quello della fig. 1 (sezione triangolare) qui di seguito riportato con paramento verticale e completato con indicazioni geometriche

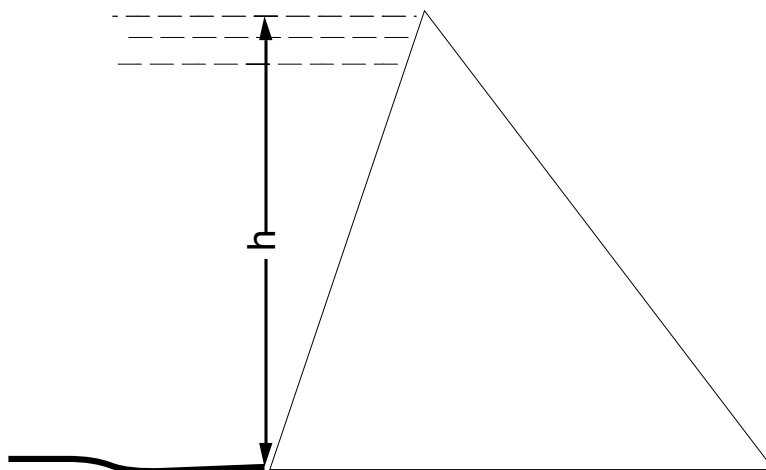


Fig. 4 - Sezione di predimensionamento della diga.

relativamente ad una profondità di un metro, sono :

- a) la spinta delle acque

$$S = \frac{1}{2} \gamma_a h^2 \quad (1)$$

applicata nel baricentro del diagramma delle pressioni, cioè ad  $\frac{1}{3}$  dalla base ed ortogonale al paramento verticale;

- b) il peso proprio della diga

$$P = \frac{1}{2} b h \gamma_m \quad (2)$$

applicata nel baricentro della sezione triangolare schematica;

a queste va aggiunta

- c) la sottopressione, cioè quella forza dovuta alla pressione che dell'acqua che normalmente si infiltra sotto la diga e spinge dal basso verso l'alto<sup>5</sup>, si suppone ancora che il suo valore massimo sia:

---

<sup>5</sup> a tutt'oggi non vi sono studi definitivi circa all'andamento effettivo delle pressioni al di sotto della diga; in questa fase, salve più precisi determinazioni nel seguito, ed a vantaggio della stabilità si suppone che la spinta che l'acqua esercita sulla base della diga vari linearmente (massimo all'interno e minimo all'esterno)



$$\mu \gamma_a h \quad (3)$$

dove

$\mu$  é un coefficiente che varia al variare del tipo di diga e dell'altezza (precisamente aumenta con l'aumentare di  $h$  e per  $h$  maggiore od uguale a 75 m si prende  $\mu = 1$  (cioè il valore massimo).

Il valore di  $\mu$  è tabulato é tabulatio qui di seguito

Altezza della diga [m]	Qualità del terreno di fondazione requisiti di compattezza ed impermeabilità		
	coefficiente $\mu$	coefficiente $\mu$	coefficiente $\mu$
<25	0	0.5	1
tra 25 e 50	.05	0.75	1
tra 50 e 75	0.66	1	1
oltre 75	1	1	1

La spinta della sottopressione sarà dunque data dalla:

$$S_P = \frac{1}{2} \mu \gamma_a h b \quad (5)$$

applicata al baricentro del rispettivo diagramma delle pressioni e rivolta verso l'alto.

Pertanto le forze principali che globalmente agiscono sulla diga sono quelle di cui alla seguente figura

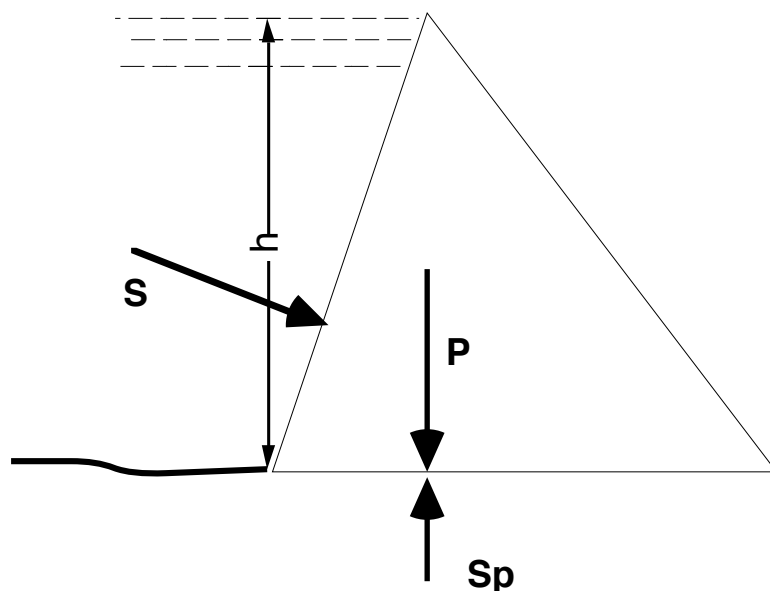
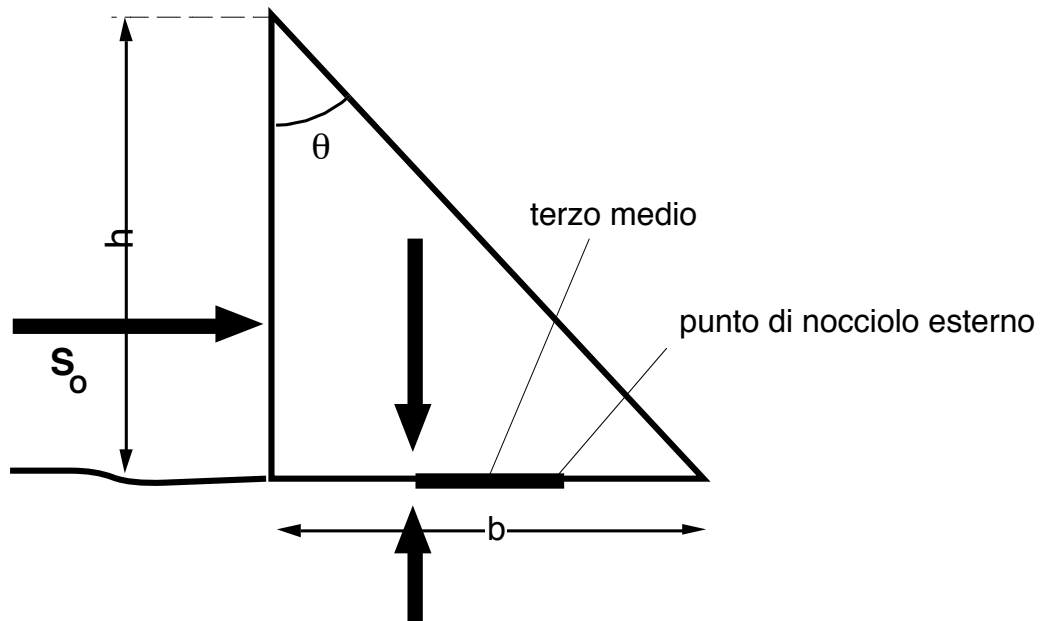


Fig. 5 - Forze che agiscono sulla diga

Per calcolarci la larghezza incognita  $b$  imponiamo che la sezione<sup>6</sup> di fondazione, supposta rettangolare di profondità unitaria, sia soggetta esclusivamente a compressione, ne segue che la reazione del terreno dovrà essere applicata dentro il *terzo medio*<sup>7</sup>, al limite possiamo imporre che detta reazione passi per il punto di nocciolo esterno.

In questo caso il diagramma delle pressioni sul terreno sarà di forma triangolare.

Imponendo quindi l'equilibrio dei momenti rispetto punto esterno di nocciolo, avremo e sempre nell' ipotesi semplificativa di paramento a monte verticale, con riferimento alla figura seguente



<sup>6</sup> Vedremo nel seguito che ogni sezione deve rispondere a tale condizione.

<sup>7</sup> Si ricorda che con terzo medio si intende l'interno del nocciolo centrale d'inerzia di una sezione rettangolare, nella fattispecie é il rettangolo di profondità unitaria e lunghezza  $b$

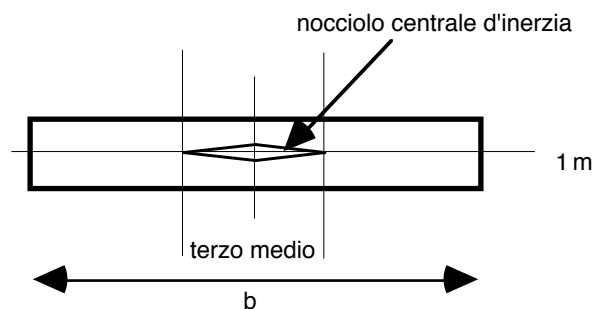


Fig.6-Sezione maestra di una diga con paramento verticale e forze agenti

avremo:

$$S_O \frac{h}{3} + S_P \frac{b}{3} - P \frac{b}{3} = 0 \quad (5)$$

segue che:

$$b = h \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_m - \mu \gamma_a}} \quad (6)$$

indicando con  $\gamma_r$  il peso specifico ridotto, cioè:

$$\gamma_r = \gamma_m - \mu \gamma_a \quad (7)$$

avremo:

$$b = h \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_r}} \quad (8)$$

Con questo procedimento ci siamo calcolati la diga per altezze non superiori ai 30 ÷ 35 m. cioè quando il paramento a monte può essere verticale (vedi oltre).

Per altezze superiori a tali valori occorre dare una inclinazione anche al paramento interno, sia  $\theta_m$  la tangente della angolo rispetto alla verticale del paramento interno, con riferimento alla figura seguente avremo:

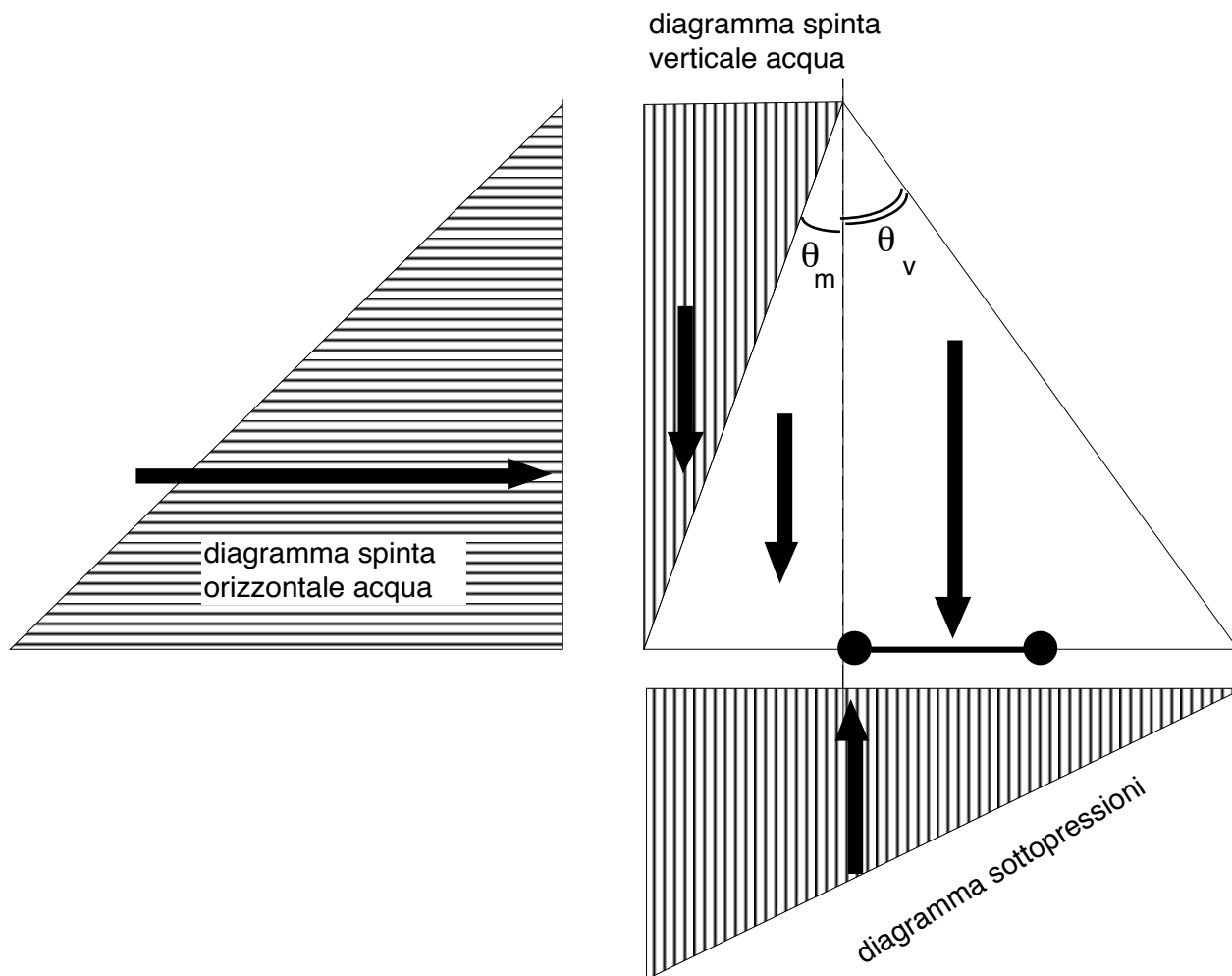


Fig.7 - Sezione maestra con paramento a monte non verticale  $\theta_m \neq 0$

Detto  $\theta_v$  la tangente del parametro esterno, gli elementi geometrici e le forze agenti, con ovvio significato dei simboli, sono:

$$b = h (\theta_m + \theta_v) \quad (9)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} h^2 \gamma_m \theta_m \quad (10)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} h^2 \gamma_m \theta_v \quad (11)$$

$$S_O = \frac{1}{2} \gamma_a h^2 \quad (12)$$

$$S_v = \frac{1}{2} \gamma_a h^2 \theta_m \quad (13)$$

$$S_P = \frac{1}{2} \mu \gamma_a h^2 (\theta_m + \theta_v) \quad (14)$$

Rispettivamente le forze di cui sopra hanno braccio, rispetto al punto di nocciolo esterno, dato dalle :

$P_1$  forza verticale dovuta al peso proprio della parte a monte del triangolo fondamentale

$$\frac{2}{3} b - \frac{2}{3} h \theta_m = \frac{2}{3} h \left( (\theta_m + \theta_v) - \theta_m \right) = \frac{2}{3} h \theta_v$$

$P_2$  forza verticale dovuta al peso proprio della parte a valle del triangolo fondamentale

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} b - \left( h \theta_m + \frac{1}{3} h \theta_v \right) = \\ & = \frac{2}{3} h \left( (\theta_m + \theta_v) - \frac{3}{2} \left( \theta_m + \frac{1}{3} \theta_v \right) \right) = \\ & = \frac{2}{3} h \left( \theta_m + \theta_v - \frac{3}{2} \theta_m - \frac{1}{2} \theta_v \right) = \\ & = \frac{2}{3} h \left( \frac{1}{2} \theta_v - \frac{1}{2} \theta_m \right) = \frac{1}{3} h (\theta_v - \theta_m) \end{aligned}$$

$S_0$  forza orizzontale dovuta all' spinta dell' acqua sul paramento a monte

$$\frac{1}{3} h$$

$S_V$  forza verticale dovuta all' spinta dell' acqua sul paramento a monte

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} b - \frac{1}{3} h \theta_m = \frac{2}{3} h (\theta_m + \theta_v) - \frac{1}{3} h \theta_m = \\ & = \frac{1}{3} h (2\theta_m + 2\theta_v - \theta_m) = \frac{1}{3} h (2\theta_v + \theta_m) \end{aligned}$$

$S_P$  forza verticale dovuta all' spinta dell' acqua sulla fondazione (sottoppressione)

$$\frac{1}{3} b = \frac{1}{3} h (\theta_m + \theta_v)$$

Conseguentemente il momento forze ribaldanti ( $S_0$  ed  $S_P$ ) rispetto al ponto di nocciolo esterno sarà:

$$\frac{1}{2} \gamma_a h^2 \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} \mu \gamma_a h^2 (\theta_m + \theta_v) \frac{1}{3} h (\theta_m + \theta_v) =$$

$$= \frac{1}{6} h^3 \gamma_a \left( 1 + \mu (\theta_m + \theta_v)^2 \right)$$

Le forze stabilizzanti dovute al peso proprio della diga  $P_1$  e  $P_2$  avranno, sempre rispetto al punto di nocciolo, il seguente momento:

$$\frac{1}{2} h^2 \gamma_m \theta_m \frac{2}{3} h \theta_v + \frac{1}{2} h^2 \gamma_m \theta_v \frac{1}{3} h (\theta_v - \theta_m) =$$

$$\frac{1}{6} h^3 \gamma_m \left( 2 \theta_m \theta_v + \theta_v (\theta_v - \theta_m) \right) =$$

$$\frac{1}{6} h^3 \gamma_m \left( 2 \theta_m \theta_v + \theta_v^2 - \theta_v \theta_m \right)$$

A questo momento stabilizzante vi è da aggiungere quello dovuto alla componente verticale della spinta idrostatica

$$\frac{1}{2} \gamma_a h^2 \theta_m \frac{1}{3} h (2\theta_v - \theta_m) =$$

$$\frac{1}{6} \gamma_a h^3 \theta_m (2\theta_v - \theta_m) = \frac{1}{6} \gamma_a h^3 \left( 2 \theta_m \theta_v - \theta_m^2 \right)$$

Al fine di ottenere un diagramma di pressione alla base, sempre di compressione, è necessario, come già visto che la risultante passi, al più, per l'estremità di valle del nocciolo centrale d'inerzia, ciò si ottiene eguagliando a zero la somma dei tre momenti di cui sopra, ovviamente ciascuna con il proprio verso (positivo il destrogiro), pertanto:

$$\frac{1}{6} h^3 \gamma_a \left( 1 + \mu (\theta_m + \theta_v)^2 \right) -$$

$$\frac{1}{6} h^3 \gamma_m \left( 2 \theta_m \theta_v + \theta_v^2 - \theta_v \theta_m \right) + \frac{1}{6} \gamma_a h^3 \left( 2 \theta_m \theta_v - \theta_m^2 \right) = 0$$

Semplificando avremo:

$$\frac{1}{6} h^3 \gamma_a \left( 1 + \mu (\theta_m + \theta_v)^2 \right) -$$

$$+ \frac{1}{6} h^3 \left( \gamma_m \left( 2 \theta_m \theta_v + \theta_v^2 - \theta_v \theta_m \right) + \gamma_a \left( 2 \theta_m \theta_v - \theta_m^2 \right) \right) = 0$$

Ed ancora:

$$\gamma_a \left( 1 + \mu(\theta_m + \theta_v)^2 \right) -$$

$$\left( 2\gamma_m \theta_m \theta_v + \gamma_m \theta_v^2 - \gamma_m \theta_v \theta_m + 2\gamma_a \theta_m \theta_v - \gamma_a \theta_m^2 \right) = 0$$

Tenuto conto che  $\theta_m$  é molto piccolo nei confronti di  $\theta_v$  e che pertanto i termini con  $\theta_m$  al quadrato possono essere trascurati, avremo:

$$\gamma_a + 2\gamma_a \mu \theta_v \theta_m + \mu \gamma_a \theta_v^2 - 2\gamma_m \theta_m \theta_v - \gamma_m \theta_v^2 + \gamma_m \theta_v \theta_m - 2\gamma_a \theta_m^2 = 0$$

mettendo in evidenza avremo:

$$\left( \mu \gamma_a - \gamma_m \right) \theta_v^2 + \left( 2\gamma_a \mu + 2\gamma_m - \gamma_m - 2\gamma_a \right) \theta_v \theta_m + \gamma_a = 0$$

ed infine:

$$\left( \mu \gamma_a - \gamma_m \right) \theta_v^2 + \left( 2\gamma_a (\mu - 1) - \gamma_m \right) \theta_v \theta_m + \gamma_a = 0$$

dividendo per  $\gamma_a$  e con modeste altre operazioni, si avrà:

$$\left( \mu - \frac{\gamma_m}{\gamma_a} \right) \theta_v^2 + \left( \left( 2(\mu - 1) - \frac{\gamma_m}{\gamma_a} \right) \theta_m \right) \theta_v + 1 = 0$$

ricordandoci della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado nonché di trascurare i termini in  $\theta_m^2$ , si avrà:

$$\theta_v = - \frac{2 \sqrt{\mu - \frac{\gamma_a}{\gamma_m}} - \frac{2(\mu - 1) - \frac{\gamma_a}{\gamma_m}}{\gamma_m} \theta_m}{\mu - \frac{\gamma_a}{\gamma_m}} - \frac{\frac{\gamma_a}{\gamma_m}}{4 \left( \mu - \frac{\gamma_a}{\gamma_m} \right)} \theta_m$$

da cui:

$$\theta_v = \frac{2}{\sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu}} - \frac{2(1-\mu) - \frac{\gamma_m}{\gamma_a}}{4\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu\right)} \theta_m \quad (15)$$

Pertanto, tenuto conto che:

- $\mu$  é pressocché ininfluyente nella  $\frac{2(1-\mu) - \frac{\gamma_m}{\gamma_a}}{4\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu\right)}$
- il rapporto  $\frac{\gamma_m}{\gamma_a}$  é pressocché costante e pari a  $\frac{2400}{1000} = 2,4$

segue che  $\frac{2(1-\mu) - \frac{\gamma_m}{\gamma_a}}{4\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu\right)}$  può essere assunto pari a 0,9:

pertanto la (15) si riduce alla :

$$\theta_v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu}} - 0,9 \theta_m \quad (16)$$

dunque fissato  $\theta_m$  é possibile con la (16) ottenere il  $\theta_v$  e quindi la larghezza  $b$ , avremo:

$$b = h \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu}} - 0,9 \theta_m + \theta_m \right) \quad (17)$$

quindi:

$$b = h \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu}} - (0,9 - 1) \theta_m \right)$$



da cui:

$$b=h \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_a} - \mu}} - 0,1 \theta_m \right) \quad (17')$$

## **4.1.2 Le questioni costruttive per le dighe a gravità massicce**

### **4.1.2.1 Il corpo delle dighe in calcestruzzo massiccio**

Da tempo é stata abbandonata la tecnica delle dighe in muratura, le dighe a gravità (massicce e non) vengono costruite in conglomerato cementizio.

E' stato abbandonato anche l'uso del calcestruzzo ciclopico, mentre si tende a calcestruzzi più omogenei.

All' estero da tempo sono stati utilizzati anche calcestruzzi rullati.

Le norme italiana attuali (Appendice I) non prevedono però tale tecnologia, tuttavia, con un escamotage é stata realizzata in Sardegna ed a titolo sperimentale, su progettazione del prof. Fassò, una diga costruita con calcestruzzi rullati.

La norma pertanto prevede l'uso di calcestruzzi posti in opera con le tecnologie tradizionali per tale utilizzo. A tali calcestruzzi dedicheremo il successivo paragrafo.

Si é già visto come il profilo fondamentale viene modificato in quello effettivo in sommità della diga stessa, cioè per dar luogo al franco e per la realizzazione del coronamento.

Ma le cennate modifiche non sono le uniche che vengono effettuate sul profilo fondamentale.

Pur tralasciando in questa sede lo studio di sezioni fondamentali diverse da quella triangolare (ne possono esistere con paramenti con pendenza variabile con l'altezza) occorre tener presente che a volte il paramento di valle della diga viene utilizzato, almeno in parte, come canale di sfioro della acque di supero.

Ciò é derivante dalla scelta progettuale (a volte praticata) di realizzare almeno una parte dello scarico di superficie su una porzione del corpo stesso della diga, tra il vertice del tringolo fondamentale ed il coronamento.

In questo caso il regolamento prevede due possibili soluzioni per l'acqua tracimante:

- che essa si distacchi subito dal paramento di valle senza più avervi contatto;
- che essa si adagi al paramento di valle;

La prima di tali soluzioni é tipica delle strutture ad arco, la seconda delle dighe massicce.

In tal caso il profilo a valle non può essere quello rettilineo derivante dal tringolo fondamentale ma un apposito profilo che non permetta alla vena liquida di staccarsi dal paramento stesso.

L'eventuale presenza di zone di distacco produrrebbe indesiderati fenomeni sul calcestruzzo dovuti alla cavitazione, con rapido deterioramento del materiale.

Per evitare tali fenomeni di erosione, bisognerà opportunamente sagomare il profilo della diga stessa in maniera tale che la vena liquida che sfiora, si adagi perfettamente al profilo della diga, in modo cioè che non si abbiano fenomeni di battimento e depressioni.

Il profilo più frequentemente adottato in tali casi è quello che si basa sul così detto profilo Creager .

Quest' ultimo, fissato un sistema di assi cartesiani con origine nel vertice superiore della soglia sfiorante e con asse delle x orizzontale e positivo verso valle ed asse delle y verticale e positivo verso il basso, avrà equazione :

$$y = 0,47 x^{1,8} \quad (18)$$

$$y = \frac{y_0}{h_0} \quad (19)$$

$$x = \frac{x_0}{h_0} \quad (19')$$

quindi:

$$y = 0,47 \left( \frac{x_0}{h_0} \right)^{1,8} h_0 \quad (20)$$

dove  $h_0$  è l'altezza massima che può raggiungere l' acqua sulla soglia sfiorante della diga stessa.

La figura che segue illustra una sezione di diga, analoga a quella di figura 8, ma dove le dimensioni dei vari elementi sono più aderenti ad un dimensionamento reale, sulla quale è stato tracciato un profilo Creager.

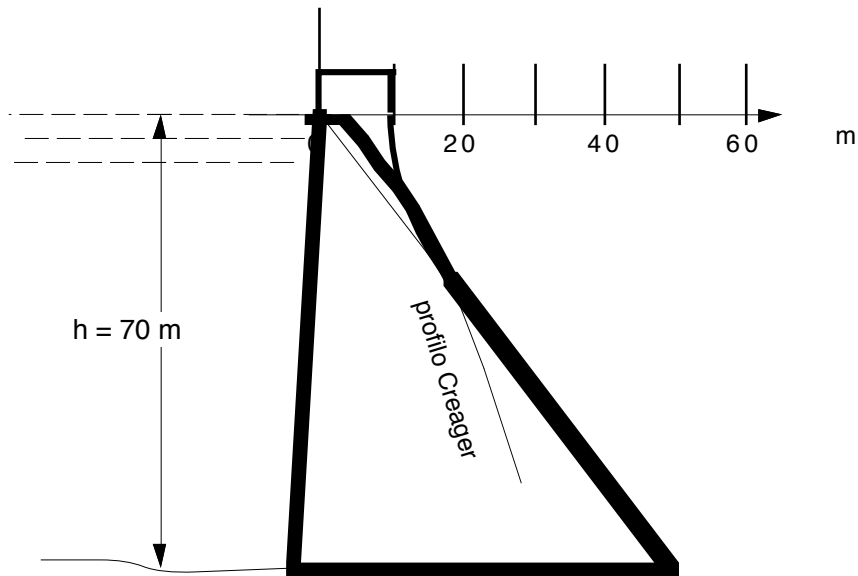


Fig.8 - Profilo Creager sovrapposto al profilo fondamentale di una diga

Una volta tracciato il profilo Creager per il massimo della altezza d'acqua  $h_0$  occorrerà raccorderla:

- a valle tramite un tratto rettilineo con il profilo fondamentale della diga;

ed

- a monte con un tratto curvilineo a sezione circolare.

Poiché il coronamento non può essere interrotto, sopra la vena stramazzante dovrà esserci un ponte e pertanto delle pile per reggere la cennata sovrastruttura.

Il raggio dell' arco di cerchio dovrà essere pari a  $0,4 h_0$  fino ad incontrare la parallela al paramento a monte distante dal detto paramento di  $0,3 h_0$

La figura seguente oltre a mostrare i due raccordi, illustra uno degli speroni sui quali saranno realizzate le pile per reggere il cennato ponte

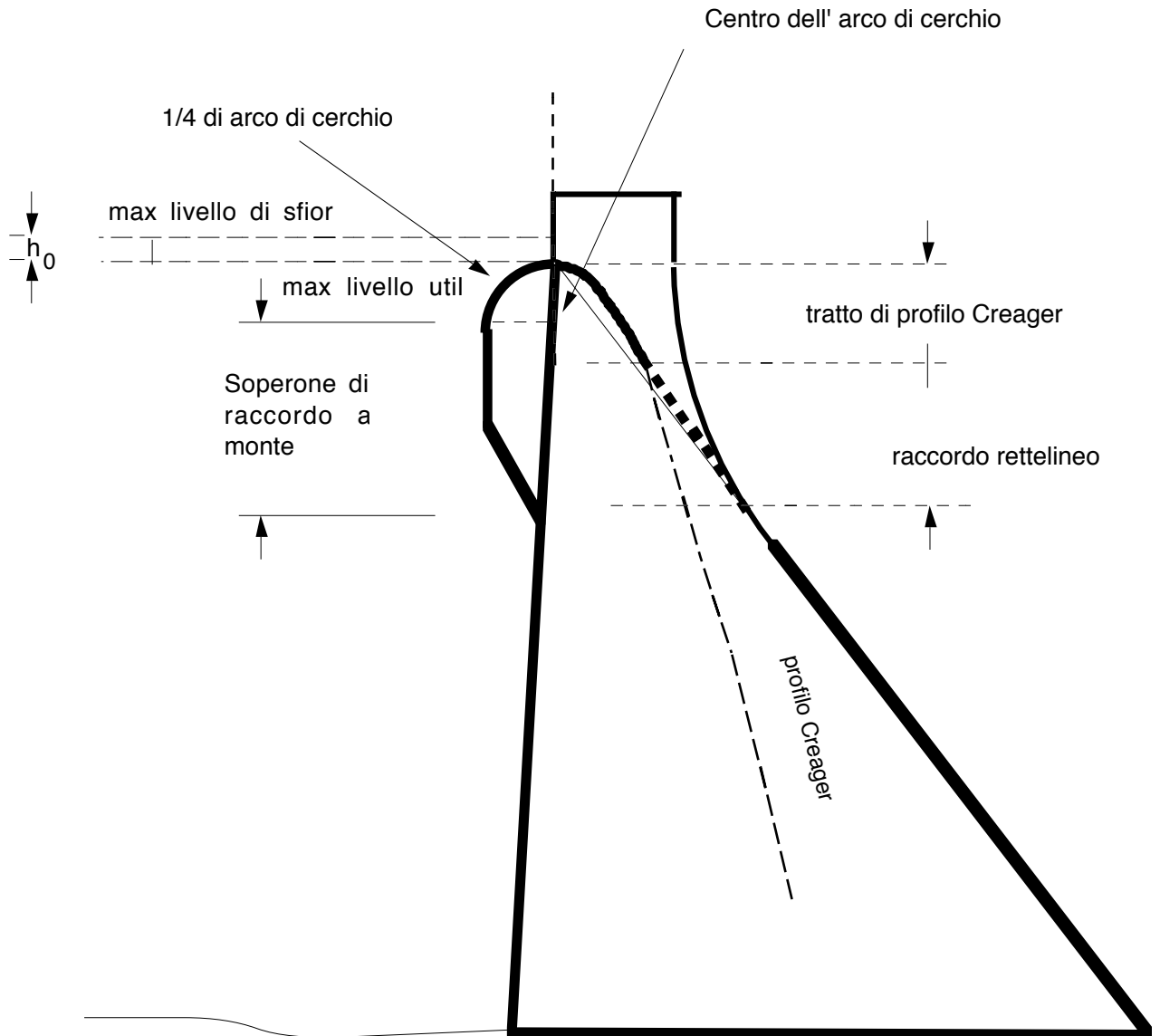


Fig9 - Profilo Creager sovrapposto al profilo fondamentale di una diga

La figura successiva mostra il raccordo nel caso di zona intermedia tra due pile: scompaiono gli speroni ed il raccordo circolare di monte viene completato sino a ritornare sul paramento di monte .

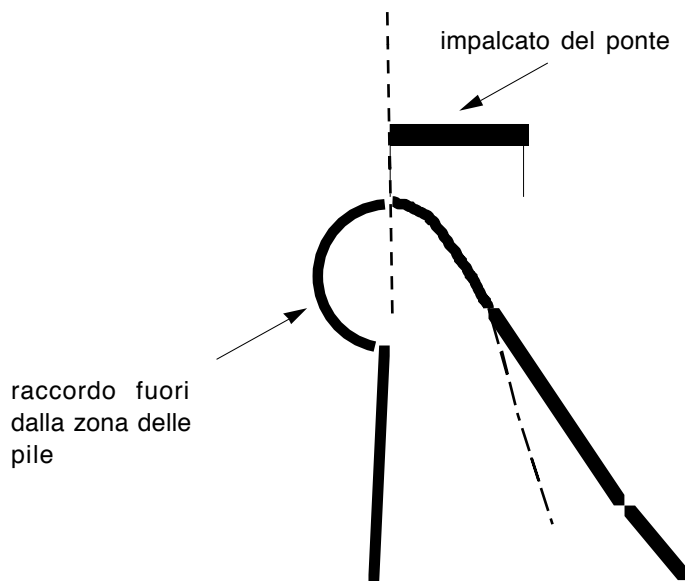


Fig10 - Profilo della diga nella zona intermedia tra due pile del ponte sopra lo stramazzo

Ovviamente il progettista può, nel rispetto del regolamento compiere scelte progettuali diverse da quelle appena sopra indicate, che rappresentano solo un' esempio anche se tra i più seguiti

L' altezza  $h_0$  è ovviamente calcolata per la portata massima che può transitare sullo stramazzo, cioè, dalle formule del Bazin sugli stramazzi, dalla:

$$Q_{\max} = m L h_0 \sqrt{2 g h_0} \quad (21)$$

Con L larghezza dello sfiratore e con ovvio significato degli altri simboli.

La (21) , prima dell' avvento dei moderni mezzi di calcolo, era stata risolta e riportata, tabulata, sui manuali.

Evidentemente che lungo il profilo la lama di acqua che trascina dalla diga avrà le caratteristiche di corrente veloce mentre a valle della diga la corrente è necessario che la stessa corrente diventi lenta.

Ciò per ovvie questioni di opportunità ma anche se ciò non fosse necessario, in generale ca caratteristiche dell' alveo a valle (pendenza) solo tali che , comunque la corrente che vi transiterà dovrà divenire lenta.

Segue quindi che dovrà verificarsi il fenomeno del risalito (o salto di Bidone), dovrà cioè avvenire una dissipazione di energia.

Per controllare il fenomeno, per evitare la corrosione al fondo, occorre far si che la dissipazione avvenga in un idoneo tratto in calcestruzzo, detto appunto dissipatore

Detti :

$h_1$  l'altezza dell'acqua prima del risalto.

$h_2$  l'altezza dell'acqua a valle del risalto stesso.

il dissipatore che é un canale, come già detto in calcestruzzo, dovrà avere una lunghezza  $L_d$  data dalla formula di origine empirico-sperimentale:

$$L_d \geq 6 (h_2 - h_1) \quad (22)$$

Questo canale é caratterizzato da un salto di fondo, gradino di altezza pari a:

$$\Delta H = H_2 - H_1 \quad (23)$$

dove  $H_2$  ed  $H_1$  sono le energie totali dell'acqua prima e dopo il risalto. L'alzata del gradino sarà inclinata ed esso sarà al termine del tratto di lunghezza  $L_d$

La figura seguente illustra un dissipatore.

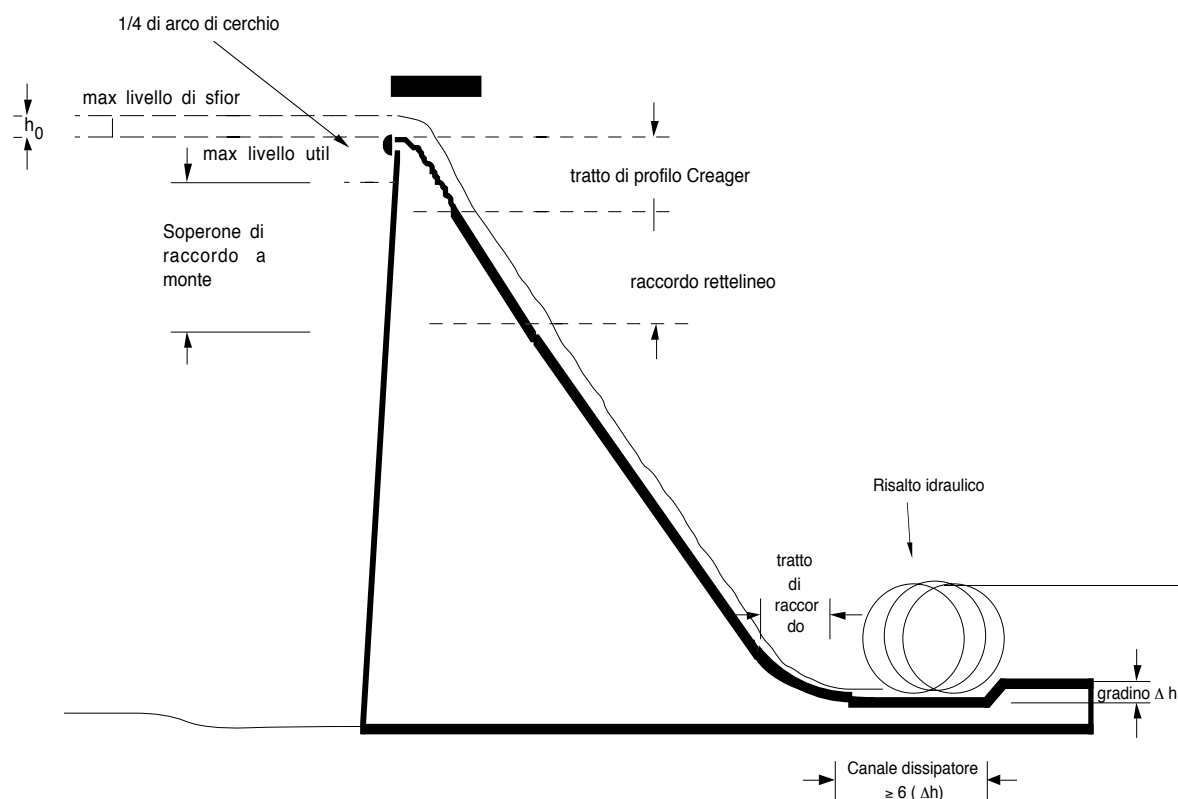


Fig. 11- Effetto del dissipatore a valle di un profilo Creager

Dalla (21) é possibile ottenere  $h_0$  e quindi tramite la:

$$H_0 = Z + h_0 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} \quad (24)$$

si otterrà l'energia totale a monte della diga, nelle precedenti ovviamente avremo:

$$v_0 l = Q/A. \quad (25)$$

Questa energia fino al risalto la possiamo considerare costante quindi nella sezione 1 avremo che:

$$H_0 = H_1 = h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \quad (26)$$

se al posto della velocità mettiamo la portata per unità di lunghezza ed avremo:

$$H_1 = h_1 + \frac{\alpha q^2}{2g h_1^2} \quad (27)$$

da cui, come è noto dall' Idraulica, possiamo calcolarci  $h_1$  in funzione di  $q$

$$q = h_1 \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (H_1 - h_1)} \quad (28)$$

La precedente è la ben nota "curva di variazione delle portate in funzione delle altezze". che si annulla per  $h = 0$  e per  $h = H$

La figura seguente da un classico andamento del diagramma  $q = q(h)$  di cui alla (26) che come è noto presenta un massimo in corrispondenza dell' altezza critica  $K$ .

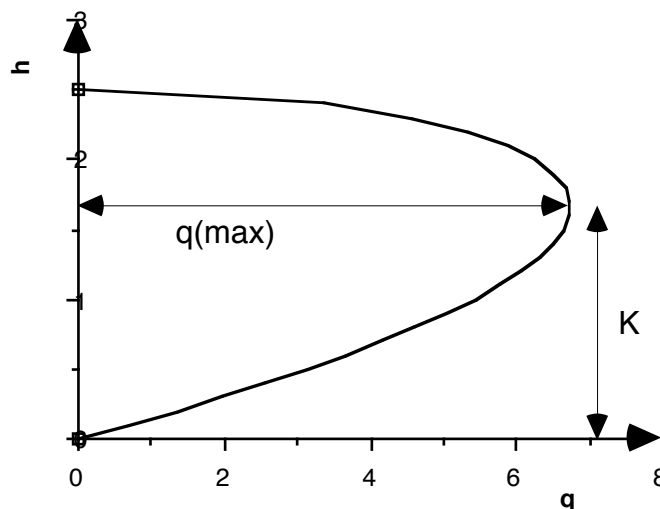




Fig. 12- Fenomeno del risalto- curva portate altezze

La figura seguente mostra l'utilizzo della precedente "curva di variazione delle portate in funzione delle altezze" per ottenere i valori dell'altezza dell'acqua a monte ed a valle del risalto, in funzione della portata  $h$

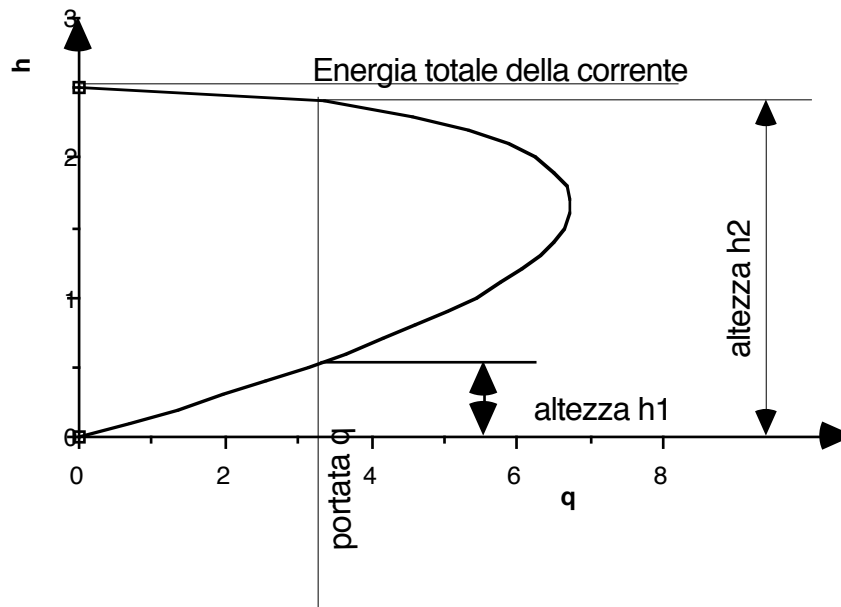


Fig. 12- Fenomeno del risalto- determinazione dell'altezza del risalto

Possiamo ora conoscere la lunghezza del dissipatore.

L'energia che si dissipa nel risalto è data da:

$$H_1 - H_2 = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2} \quad (29)$$

noto  $H_2$  possiamo calcolarci a.

Se la lunghezza della platea del dissipatore è troppo lunga si ricorre a dei blocchi di calcestruzzo che oppongono un ulteriore ostacolo all'acqua favorendo la dissipazione dell'energia; (per il dimensionamento in questi casi occorre ricorrere al modello idraulico). Tale sistema fu ideato dal Rebokoc.

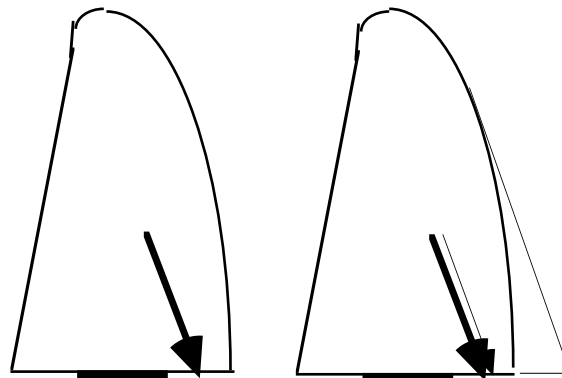
Per quel che riguarda la stabilità della diga sussistono alcune differenze rispetto alla semplice diga a gravità non trascinabile, perchè occorre tener conto dell'altezza dell'acqua sulla diga.

Si determina l'angolo  $\theta_v$  imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto al punto di nocciolo esterno.

La retta di azione della risultante può capitare entro il terzo medio della base della diga con profilo Creager, come può capitare fuori.

Nel primo caso non sussistono particolari problemi.

Nel secondo, per assicurare stabilità alla diga ed aderenza tra vena liquida e profilo della diga



a)

profilo Creager  
non raccordato  
e non in equilibrio

b)

profilo Creager  
raccordato con  
una retta parallela  
alla direzione della  
risultante ed in  
equilibrio

conviene tracciare la parallela alla retta d'azione estrema tangente al profilo Creager, e quindi riempire con calcestruzzo anche la parte compresa tra il Creager e tale retta; il paramento a valle della diga risulterà quindi in parte un profilo Creager ed in parte rettilineo.

Evidentemente in questa soluzione abbiamo esuberanza di materiale, per questo motivo é possibile ridurre il materiale a monte ritirando il profilo stesso verso valle

#### 4.1.2.2 I Calcestruzzi

Ovviamente questo ha caratteristiche ben diverse da quelle cui siamo abituati a pensare, cioè a quello del cemento armato.

I principali motivi di tale diversità sono qui di seguito sinteticamente riportati:

- grande mole di calcestruzzo necessario e pertanto necessità di impianti di produzione ad hoc;
- problemi di carattere termico (sviluppo di calore durante la presa in raffronto alla mole di calcestruzzo ed allo stato tensionale indotto);
- impermeabilità;

A tal proposito i competenti uffici del Ministero LL.PP. hanno sentito la necessità di emanare disposizioni in proposito, talune delle quali sono contenute in regolamenti generali sui leganti, altre in legislazione speciale sugli sbarramenti di ritenuta:

- "Caratteristiche tecniche e requisiti dei leganti idraulici" cui alla legge 26/5/1965 n. 595 (G.U. 10/6/1965 N. 143)
- "Nuove norme sui requisiti di accettazione e modalità di prova dei cementi" D.M. 3/6/1968

Le cennate norme del 1965 all' art. 1 definisce i leganti oggetto della norma stessa distinguendoli in :

- a) cementi portland
- b) cemento pozzolanici
- c) cemento d'altoforno
- d) cementi alluminosi
- e) cementi per sbarramenti di ritenuta

Dalla precedente elencazione é evidente sia l'importanza data all'argomento che il distinguo tra i leganti per le dighe da quelli per opere diverse.

Circa le differenze caratteristiche, cui su é già fatto cenno nel Cap. II si rimanda per una più estesa trattazione a corsi e testi specifici (p. es. I Calcestruzzi di M. Collepardi, ed. Hoepli)

Ne consegue anche una differenziazione tra i calcestruzzi.

Dobbiamo anche stabilire il tipo di calcestruzzo, questo può essere normale, colato o ciclopico.

Occorre fare eseguire durante la costruzione le prove sui materiali, importanti sono quelle sulla granulometria dei materiali e quelle sulla presa; (tali prove si devono fare sia presso laboratori ufficiali che in laboratori appositi che devono aver posto nel cantiere).

#### **4.1.2.3 I giunti di dilatazione e cenni sui problemi di filtrazione**

Bisogna ora esaminare i fenomeni termici, data l'importanza, per il caso delle dighe, delle masse in gioco, la quantità di calore sviluppato e lo stato tensionale indotto dalla conseguente variazione di temperatura assumono importanza cosiderevole.

A tutt'oggi é estremamente difficoltoso, se non impossibile, valutarne gli effetti tramite un calcolo matematico, d' altronde é più utile contenerli che conoscerli con una precisione (sempre ipotetica) per conferire alla struttura un'adeguata resistenza atta ad assorbire totalmente gli effetti tensionali dovuti a tale fenomeno termico, pertanto si ricorre a dei giunti di dilatazione.

Tali giunti si suddividono in: giunti permanenti e giunti temporanei.

I primi servono ad assorbire le dilatazioni termiche stagionali, i temporanei ad assorbire i fenomeni termici dovuti alla presa del calcestruzzo.

Durante la presa, nel calcestruzzo si verificano delle temperature elevate, d'altra parte durante e dopo la presa si ha un raffreddamento all'esterno mentre l'interno rimane caldo accadono dunque dei fenomeni di compressione dalle parti esterne sul nucleo e per reazione il nucleo esercita degli sforzi di trazione verso l'esterno.

Questi sforzi di trazione portano alla lesione delle pareti esterne facilitando l'infiltrazione dell'acqua. Occorre perciò creare dei giunti che permettano un più uniforme raffreddamento del calcestruzzo.

Questi giunti si ottengono lasciando delle cavità dentro il calcestruzzo stesso.

Queste cavità devono arrivare sino alla base del calcestruzzo stesso.

Essi hanno una larghezza variabile da 1÷1,5 m. ed un iterasse di 20 ÷ 30 m.

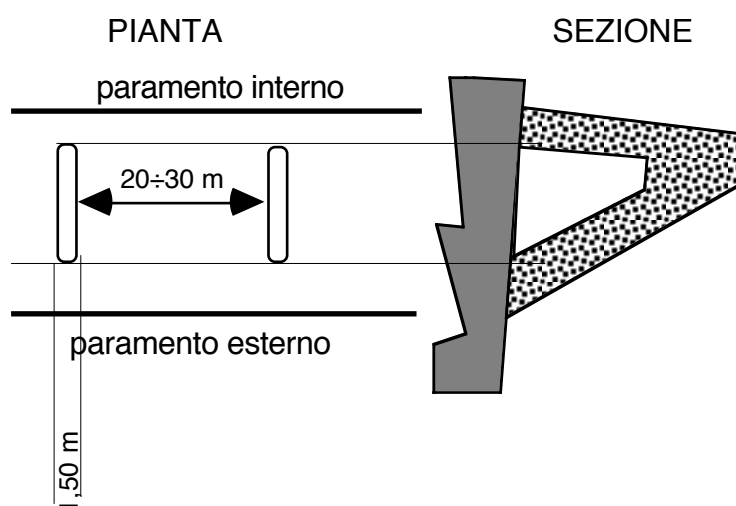


fig.

Una volta cessata la dilatazione si riempiono tali giunti con calcestruzzo.

Altro tipo di giunto è quello permanente, esso deve assorbire gli sbalzi termici tra intradosso ed estradosso;

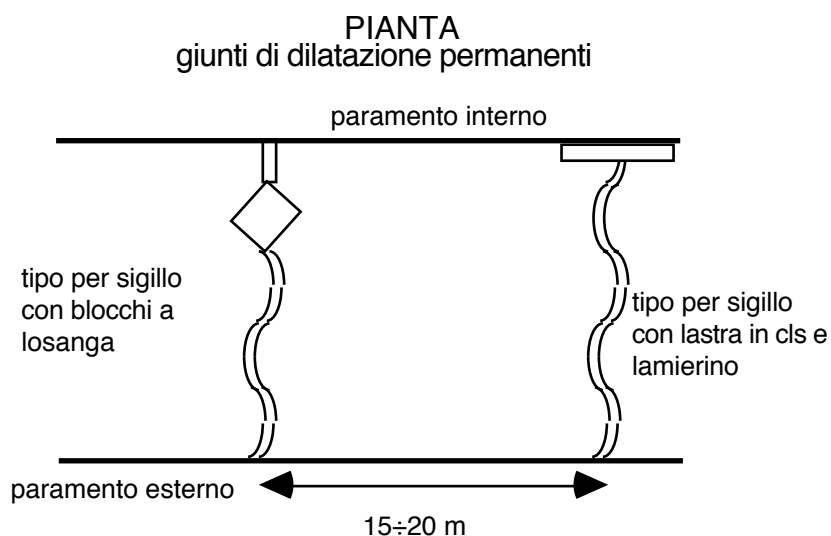


fig.

Questi giunti hanno un interesse tra i 15÷25 m. e di spessore di qualche centimetro, hanno un andamento sinoidale. Queste strisce vengono riempite con materiale bituminoso (carta bitumata, lana di vetro) o con bitume. Una delle preoccupazioni è quella di impedire le infiltrazioni di acqua; occorre perciò mettere a monte dei coprigiunti. questi possono essere di due tipi:

- 1) un lamierino di rame che viene posto tra il calcestruzzo e che funziona da soletta.
- 2) Un'altro sistema è quello di lasciare nel calcestruzzo una losanga e successivamente riempirla con un blocco di calcestruzzo armato con un blocco viene spinto dall'acqua ed impedisce all'acqua stessa di infiltrarsi.

Particolare della zona del paramento interno in presenza di giunto di dilatazione

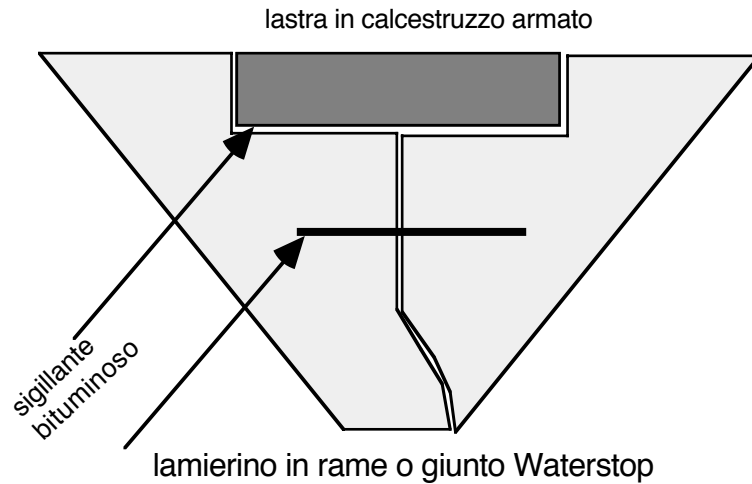


fig.

Particolare della zona del paramento interno in presenza di giunto di dilatazione

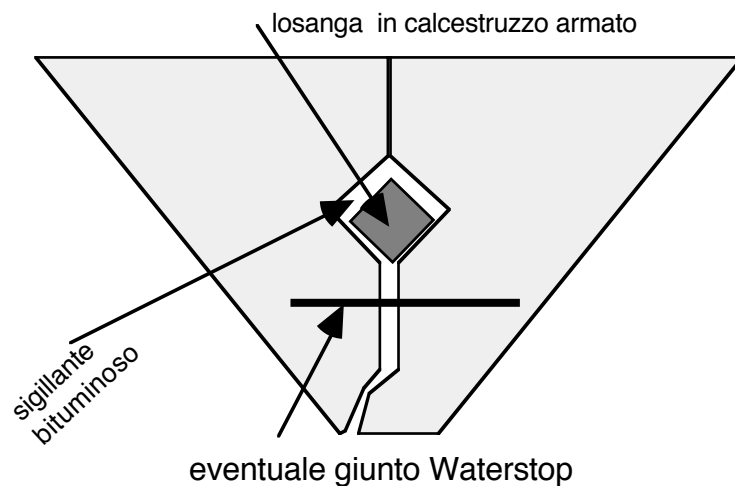


fig.

Per impedire ulteriormente e queste infiltrazioni ed infiltrazioni per peremeabilità del calcestruzzo, si ricorre a tutto un sistema di canali drenanti. All'uopo l'Ing. Levi propone di realizzare sul paramento a monte una serie

di voltine tale metodo è stato applicato ed ha dimostrato la sua efficacia ma è costosissimo.

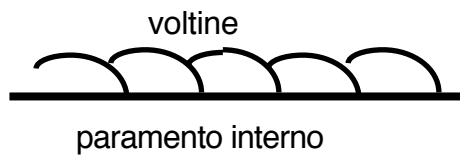


fig.

E' costoso perchè queste volte devono sopportare il carico idraulico; in essi l'acqua infiltrata viene portata in basso, là raccolta in un canale e scaricata a valle.

Un metodo molto più economico consiste nel lasciare dei canali di drenaggio di diametro tra 20÷50 cm. con interasse di. 1,50÷ 3,00 m, tali canali sono verticali.

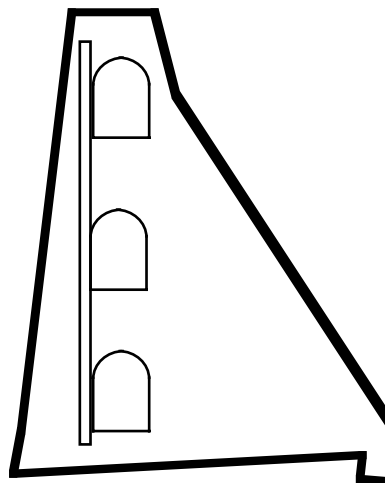


fig.

Orizzontalmente vengono fatte delle gallerie di ispezione in modo da ispezionare la diga e quindi provvedere alle riparazioni.

L'acqua infiltrata va in basso dove viene raccolta in canali e scaricata a valle. Diametri minori dei suddetti canali sono sconsigliabili per la difficoltà di esecuzione degli stessi, mentre diametri maggiori possono essere nocivi alla stabilità della diga.

#### 4.1.2.4 Cenno sui problemi di fondazione

Le fondazioni sono uno tra i punti più delicati della diga.

Infatti si tratta non solo di assicurare che le tensioni presenti nel calcestruzzo si trasmettano al terreno sottostante (ed in genere trattasi di tensioni considerevoli) ma anche di eliminare o quanto meno ridurre il pericolo della sottofiltrazione della diga.

I due aspetti comunque, in genere non sono in contrasto tra di loro pertanto le soluzioni valide per l'uno hanno efficacia anche per l'altro.



### 4.1.3 Elementi per la verifica statica delle dighe a gravità

#### 4.1.3.1 Le varie forze in gioco

Il regolamento riportato nell'appendice I riporta le forze da mettere in considerazione per la verifica delle dighe.

Abbiamo già preso in considerazione nel paragrafo dedicato al predimensionamento delle forze principali, cioè:

- la spinta idraulica,
- il peso proprio

e

- le sottopresioni

A queste ultime occorre aggiungerne altre:

- nelle zone soggette a gelo occorre considerare la spinta del ghiaccio;
- nelle zone che potrebbero essere soggette a sismi, la forze susseguenti tale sollecitazioni

Esaminiamo le varie forze sopra indicate alla luce del regolamento vigente.

Ben poco vi è da aggiungere sulle forze derivanti dalla spinta idraulica e dal peso proprio.

Invece sono da esaminare più da vicino le altre forze a partire dalle sottopresioni idrauliche.

Questa la si ritiene pari a 2,5 ton. per metro lineare di lunghezza e per ogni 10 [cm]β. di spessore di ghiaccio (cioè 2,5 kg/cm<sup>2</sup>).

Un'altra forza che può intervenire è l'azione sismica; il moto sussultorio non provoca tensioni (contrariamente a quanti si riteneva una volta) perchè terreno e diga si muovono contemporaneamente in senso verticale. La sovrappressione per il moto ondulatorio è:

$$\Delta_p = 0,74 \alpha \gamma_a \sqrt{y} (2 h - y)$$

tale sezione è applicata alla sezione che si considera.

Questa formula è l'equazione una ellisse, y è la profondità della sezione dal pelo liquido. La sovrappressione è massima per y = h.

$\alpha$  è il coefficiente sismico (vale 0,10 per le zone di II categoria e 0,15 per le zone di I categoria).

Una volta progettata la diga, occorre verificarla considerando tutte le forze in giuoco.

Oltre alle forze già elencate bisogna mettere in conto gli effetti tensionali provocati dai fenomeni termici, questi fenomeni sono di due specie: sbalzi termici dovuti alle condizioni atmosferiche (tra giorno e notte o tra estate e inverno e soprattutto tra intradosso ed extradosso della diga stessa), e, in secondo luogo, effetti del fenomeno di presa del calcestruzzo

A rigore bisognerebbe distinguere due sottocasi:

- alte temperature dovute al fenomeno di presa;
- ritiro del calcestruzzo

Per eliminare tali fenomeni, non si conoscono bene, si costruiscono dei giunti di dilatazione.

#### 4.1.3.2 Lo studio dello stato tensionale

Prendiamo ancora in esame il nostro profilo fondamentale.

E' ovvio che la diga non può essere considerato come un solido di De Saint Venant, pertanto lo studio dello stato tensionale va affrontato sempre con i metodi della Scienza delle Costruzioni, ma non con le drastiche semplificazioni tipiche delle strutture riconducibili alla ben nota semplificazione del corpo che ha una dimensione prevalente sulle altre.

In particolare per il corpo di una diga non è accettabile ammettere la presenza di una sola tensione del tipo normale (cioè una  $\sigma$ ) come invece è classico per il solido di De Saint Venant.

Dunque il tensore degli sforzi

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \sigma_y & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \sigma_z \end{array}$$

è ben più affollato che per travi e pilastri.

Fissato un sistema di assi coordinati con :

- l'asse x orizzontale per il vertice del triangolo fondamentale e diretto da monte verso valle;
- l'asse y verticale verso il basso per il vertice del triangolo fondamentale;

- l'asse z orizzontale per il vertice del triangolo fondamentale e diretto come il dito medio della mano sinistra (x come il pollice ed y come l'indice) ;

possiamo ammettere con una certa facilità, per le dighe massicce rettilinee che  $\sigma_z$  sia nulla.

Invero neppure tale semplificazione sarebbe di per se ammissibile se non ci venissero incontro i giunti di dilatazione temporanei e permanenti di cui abbiamo già parlato che hanno lo scopo di rendere nullo o quanto meno trascurabile tale stato tensionale.

Dunque la verifica non può essere limitata ad un confronto tra una singola tensione e la tensione ammissibile, ma di contro è necessario conoscere l'intero status tensionale per confrontarlo, tramite le teorie derivanti dalle ipotesi di Von Mises e consimili

Indubbiamente gli stati tensionali più pericolosi si manifestano in prossimità dei paramenti della diga.

Ma sia per quello interno che per quello esterno possiamo avvalerci di alcune informazioni aggiuntive.

Infatti entrambi i suddetti paramenti sono, di certo, dei piani principali dove sono presenti solo tensioni normali ( $\sigma'$ ). Infatti sul paramento di monte, ad esempio agisce la pressione idrostatica che è normale alla superficie del paramento e non ha componenti orizzontali. Dunque la superficie del paramento è piano principale, ragionamento analogo per il paramento di valle dove agisce la pressione atmosferica, anch'essa di tipo idrostatico.

Prendiamo un elemento di diga prismatico a sezione triangolare ABC (vedi figura seguente), sia y la profondità del baricentro, il piano MN è, come già visto, uno dei piani principali

Il piano AC è normale al piano MN, mentre il piano BC è orizzontale.

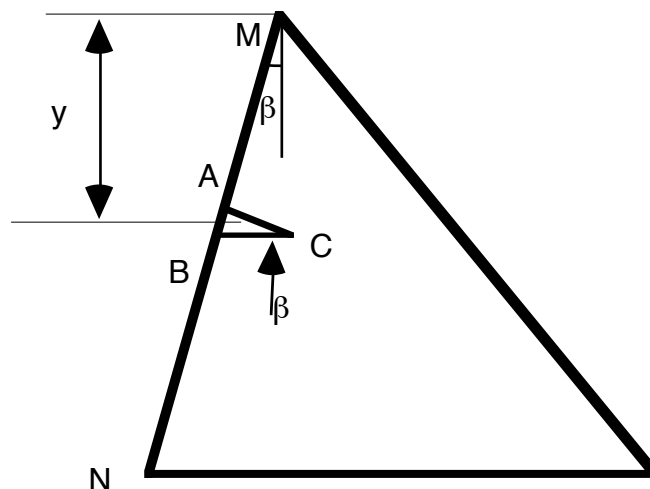
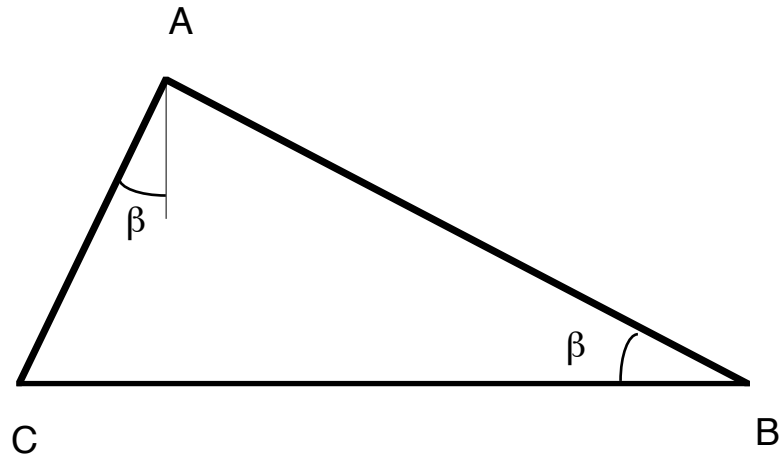


fig.

Ingrandiamo il nostro elemento prismatico.



Siano:

$$\overline{AB} = 1$$

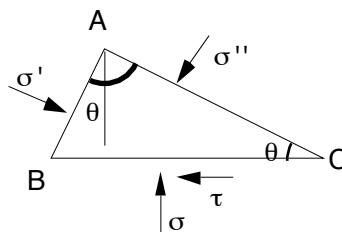
$$\vartheta = \operatorname{tg} \beta$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{\vartheta}$$

dove  $\overline{AB}$  indica la lunghezza del segmento AB e così per gli altri elementi soprastegnati.

Indichiamo inoltre le tensioni secondo la simbologia di figura



Sul segmento AC si è indicato solo una tensione di tipo normale  $\sigma''$  in quanto questo, essendo ortogonale ad un piano principale è anch'esso principale.

Il terzo piano principale e ovviamente quello ortogonale ai due ora individuati e coincide con il piano della sezione.

Avremo:

- che sul piano AB agirà la tensione, nota

$$\sigma' = \gamma y$$

ed questa darà sulla superficie AB una forza pari a :

$$\gamma y$$

- che sul piano AC agirà la tensione incognita  $\sigma''$

ed questa darà sulla superficie AB una forza pari a :

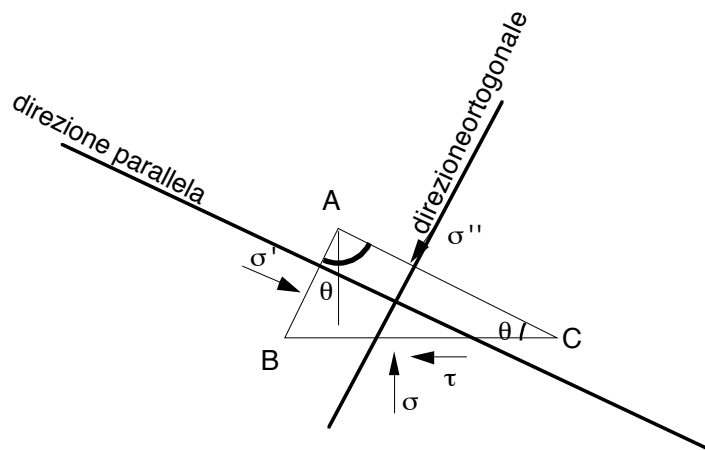
$$\frac{\sigma''}{\vartheta}$$

Nello stesso modo avremo che la tensione tangenziale la tensione normale agenti sul lato CB avranno rispettivamente, l'espressione:

$$\frac{\tau}{\vartheta \cos \beta}$$

$$\frac{\sigma}{\vartheta \cos \beta}$$

Imponiamo l'equilibrio alla traslazione parallelamente e normalmente all'elemento stesso.



- 1) parallelamente

$$\frac{\sigma''}{\vartheta} + \frac{\tau \sin \beta}{\vartheta \cos \beta} - \frac{\sigma \cos \beta}{\vartheta \cos \beta} = 0$$

- 2) normalmente

$$\gamma_a y - \frac{\tau \cdot \cos\beta}{\vartheta \cos\beta} - \frac{\sigma \cdot \sin\beta}{\vartheta \cos\beta} = 0$$

dalla seconda ricaviamo il valore di:  $\tau$

$$\tau = \vartheta (\gamma_a y - \sigma) \quad (30)$$

sostituiamo tale valore nella prima, avremo:

$$\sigma'' = \sigma (1 + \vartheta^2) - \gamma_a y \vartheta^2 \quad (31)$$

Che ci da il valore della tensioni principale sulla diga sul piano con giacenza ortogonale al paramento, con traccia orizzontale sullo stesso, profonda  $y$ .

Il regolamento impone le seguenti verifiche:

1) a serbatoio pieno

a) sul paramento a monte

$$\sigma''_{m,p} = \sigma_{m,p} (1 + \vartheta_m^2) - \gamma_a y \vartheta_m^2 \geq 0 \quad (32)$$

tale tensione, riferentesi al parametro a monte, deve essere sempre positiva (al più nulla) cioè deve essere di compressione.

b) sul paramento a valle

$$\sigma''_{v,p} = \sigma_{v,p} (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm} \quad (33)$$

cioè essa deve essere minore della tensione ammissibile,

2) a serbatoio vuoto

a) sul paramento a monte

$$\sigma''_{m,v} = \sigma_{m,v} (1 + \vartheta_m^2) \leq \sigma_{amm} \quad (34)$$

e, sul paramento a valle:

$$\sigma''_{v,v} = \sigma_{v,v} (1 + \vartheta_v^2) \geq 0 \quad (35)$$

(è evidente che nel caso di serbatoio vuoto le tensioni che si presentano sui due parametri sono di segno opposto a quelle che si verificavano a serbatoio pieno).

Dove, relativamente sia alle  $\sigma''$  che  $\sigma$  :

- il primo indice rappresenta se trattasi della del paramento di monte o di valle;
- il secondo indice se trattasi della condizione di carico di serbatoio pieno o vuoto.

le quantità:  $\sigma_{m,p}$ ;  $\sigma_{m,v}$ ;  $\sigma_{v,p}$ ;  $\sigma_{v,v}$  che compaiono nelle precedenti formule di verifica rappresentano le tensioni normali agenti sul piano BC, che vanno preventivamente determinate.

Allo scopo possiamo considerare la diga come un solido pressoinflesso dunque avremo

$$\sigma = \frac{N}{b} \left( 1 \pm \frac{6 e}{b} \right) \quad (36)$$

dove:

- N è la componente verticale della risultante di tutti i carichi;
- e è l'eccentricità di tale componente rispetto all'asse neutro della sezione che si considera,
- b è l'altezza di tale sezione (solitamente la si assume larga 1 m.).

Nel caso di serbatoio pieno vale, per il paramento a monte il segno, negativo

$$\sigma_{m,p} = \frac{N_p}{b} \left( 1 - \frac{6 e_p}{b} \right) \quad (36')$$

il contrario se il serbatoio è vuoto

$$\sigma_{m,v} = \frac{N_v}{b} \left( 1 + \frac{6 e_v}{b} \right) \quad (36'')$$

per il paramento a valle, a serbatoio pieno, varrà il segno positivo

$$\sigma_{v,p} = \frac{N_p}{b} \left( 1 + \frac{6 e_p}{b} \right) \quad (36''')$$

ed il segno negativo nel caso di serbatoio vuoto

$$\sigma_{v,v} = \frac{N_v}{b} \left( 1 - \frac{6 e_v}{b} \right) \quad (36'''')$$

In prima approssimazione tali verifiche sono sufficienti, ovviamente occorrerà calcolare  $N_p$ ,  $e_p$ ,  $N_v$  ed  $e_v$  tenuto conto non solo del peso proprio e delle spinte idrauliche ma anche delle altre forze che agiscono sulla struttura:

- spinta del ghiaccio;
- il peso del coronamento
- azioni sismiche
- le sottopressioni idrauliche

Poi occorre tener presente che sulla fondazione va rispettata anche l'equazione di congruenza, cioè l'assenza di lacerazioni tra fondazione e diga.

Pertanto il semplice calcolo sopra esposto va a complicarsi come approfondito nei paragrafi seguenti.

#### 4.1.3.2 Limitazioni dell' altezza delle dighe massicce dovute allo stato tensionale

Veniamo ora quale è l'altezza massima che può avere una diga con paramento a monte verticale.

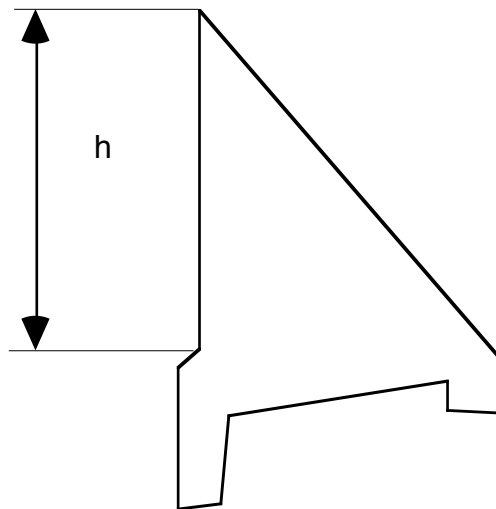


fig.23 - sezione maestra di una diga in calcestruzzo

La tensione  $\sigma''_{m,p}$  principale vale

$$\sigma''_{m,p} = \sigma_{m,p} (1 + \vartheta_m^2) - \gamma_a y \vartheta_m^2 \quad (32')$$



nel caso di paramento a monte verticale (cioè  $\vartheta_m = 0$ ) e serbatoio pieno, il regolamento ci impone che  $\sigma''_{m,p}$  sia positivo, dunque avremo:

$$\sigma''_{m,p} = \sigma_{m,p} > 0 \quad (32'')$$

mentre sul paramento di valle, sempre a serbatoio pieno, dovremmo avere:

$$\sigma''_{v,p} = \sigma_{v,p} (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm} \quad (33)$$

Sostituiamo ad  $\sigma_{m,p}$  ed a  $\sigma_{v,p}$  i valori dati dalle (36') e (36''), avremo:

$$\frac{N_p}{b} \left( 1 - \frac{6e_p}{b} \right) \geq 0 \quad (37')$$

$$\frac{N_p}{b} \left( 1 + \frac{6e_p}{b} \right) (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm} \quad (37'')$$

Tenendo conto che la  $N_p$  dovrà agire sul punto di nocciolo (d'inerzia) esterno, affinché il diagramma sia triangolare e che quindi sia rispettata la (37') con segno d'eguaglianza, ne segue che

$$e_p = \frac{b}{6} \quad (38)$$

che sostituita nella (37'') porta alla:

$$\frac{N_p}{b} \left( 1 + \frac{6 \frac{b}{6}}{b} \right) (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm} \quad (39)$$

La  $N_p$  vale:

$$N_p = \frac{b h \gamma_r}{2} \quad (40)$$

Che sostituita nella (39) porta alla :

$$2 \frac{b h \gamma_r}{b} (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm}$$

Semplificando avremo:

$$h \gamma_r (1 + \vartheta_v^2) \leq \sigma_{amm} \quad (41)$$

Tenuto conto della:

$$b = h \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_r}} \quad (8)$$

segue:

$$\frac{b}{h} = \vartheta_v = \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_r}}$$

Sostituendo avremo in definitiva:

$$h \gamma_r \left(1 + \frac{\gamma_a}{\gamma_r}\right) \leq \sigma_{amm} \quad (41')$$

La  $\sigma_{amm}$  della (41') é quella delle fondazioni, pertanto ben difficilmente si può superare il valore di 10 [Kgf/cm<sup>2</sup>] e  $\gamma_r = \gamma_m - m \gamma_a = 2500 - 0,05 \cdot 1000 = 2000$  [Kgf/mc], con tali valori avremo:

$$h_{max} = \frac{\sigma_{amm}}{\gamma_r + \gamma_a} = \frac{10 \cdot 10000}{2000} = 33,3 \quad [m]$$

Avremo dunque un' altezza massima  $h = 33,3$  [m] ma tale valore di altezza massima delle dighe con paramento verticale é quella minima possibile infatti é calcolata per un valore della  $\sigma_{amm}$  molto piccolo, tuttavia, a tutt'oggi tale valore della  $\sigma_{amm}$  non é da considerarsi molto inferiore a quello correntemente adottato.

#### **4.1.4 Approfondimento circa lo stato tensionale delle dighe massicce**

La sezione trasversale di una diga massiccia, soprattutto se rettilinea<sup>8</sup> può essere senza difficoltà concettuali assimilata dal punto di vista dello stato tensionale ad una lastra, cioè ad un corpo bidimensionale

La diga é infatti solido elastico cilindro di lunghezza che possiamo considerare indefinita, cimentato da forze, sia di massa che superficiali, uniformemente distribuite lungo le generatrici, e spiranti normalmente alla direzione di queste.

In tali condizioni il piano di una sua sezione retta qualunque sarà necessariamente piano di simmetria tanto per il solido elastico e per le forze esterne, come per le deformazioni.

##### **4.1.4.1 Richiami sugli stati piani di deformazione e di tensione**

Un punto qualunque si sposterà nel piano normale alla generatrice passante per esso

---

<sup>8</sup> A volte le dighe massicce sono non del tutto rettiline. In taluni casi le curvature vengono anche utilizzate con effetto portante (dighe ad arco-gravità), vedi oltre.

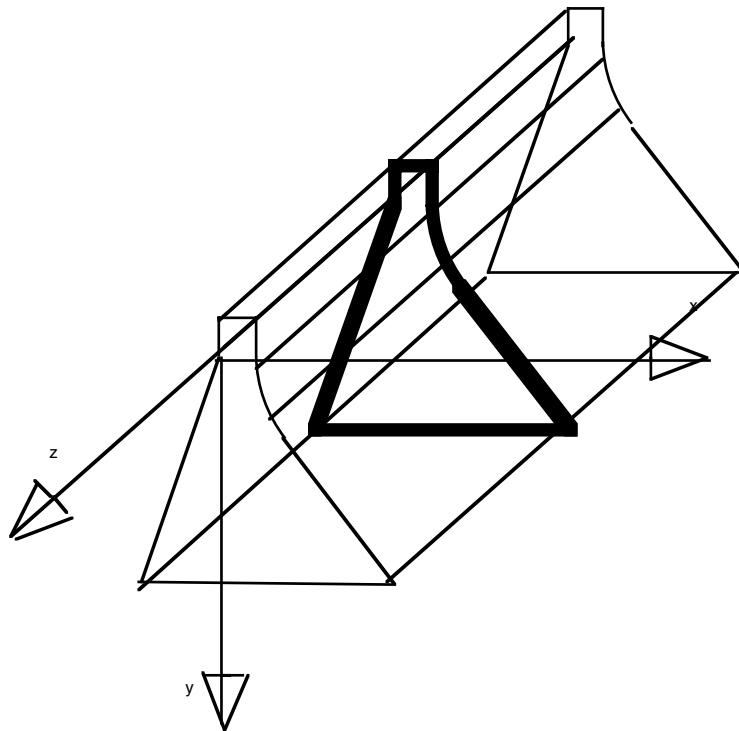


fig.24 - sezione pisana tratta dal corpo di una diga massiccia

Se indichiamo ora con  $x, y, z$ , gli assi di riferimento, con  $u, v, w$ , le corrispondenti componenti di spostamento, e assegniamo all'asse  $z$  la direzione stessa delle generatrici, sarà:

$$w=0$$

per tutti i punti del solido.

Inoltre, ovviamente avremo:

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{x,z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{y,z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\tau_{z,x} = 0$$

$$\tau_{y,z} = 0$$

Dalle precedenti e tenuto conto dei legami sforzi deformazioni<sup>9</sup> tipici del corpo elastico, avremo:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$$

e sostituendo questa nelle espressioni delle prime due dilatazioni (i ed ii della nota), avremo :

$$\varepsilon_x = \frac{m^2-1}{m^2 E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m-1} \right) \quad (42')$$

$$\varepsilon_y = \frac{m^2-1}{m^2 E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m-1} \right) \quad (42'')$$

---

<sup>9</sup> Si ricorda che tali legami tra i due tensori del secondo ordine delle deformazioni e degli sforzi sono genericamente sintetizzati dalla legge di Hook

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$$

dove  $\mathbf{E}$  é un tensore di 81 componenti (cioé del quarto ordine),

In pratica la legge di Hook si riduce alle:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{m} \right) \quad (i)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \quad (ii)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \quad (iii)$$

nonché dalle :

$$\gamma_{x,y} = \frac{\tau_{x,y}}{G} \quad (iv)$$

$$\gamma_{y,z} = \frac{\tau_{y,z}}{G} \quad (v)$$

$$\gamma_{x,z} = \frac{\tau_{x,z}}{G} \quad (vi)$$

Le equazioni indefinite di equilibrio (*equazioni di Cauchy*<sup>10</sup>), dette X e Y le componenti non nulle delle forze di massa, sono poi:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0 \quad (43')$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y = 0 \quad (43'')$$

mentre la terza equazione sarà identicamente soddisfatta in quanto le forze esterne hanno componente nulla secondo l'asse z, ed è quindi:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad (44')$$

quindi:

$$\sigma_z = \text{costante} \quad (44'')$$

Le equazioni ai limiti (condizioni al contorno) sono espresse dalle:

$$\lambda_x \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial f}{\partial y} + F_x = m^* \sigma_x + n^* \tau_{y,x} \quad (45')$$

$$\lambda_x \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_y \frac{\partial f}{\partial x} + F_y = m^* \sigma_y + n^* \tau_{x,y} \quad (45'')$$

dove:

$F_x$  ed  $F_y$  sono le componenti diverse da zero della forza applicata all'elemento superficiale generico,

$m^*$  ed  $n^*$  sono i coseni direttori non nulli della normale esterna a tale elemento

$\lambda_x$  e  $\lambda_y$  sono le componenti lungo x ed y della reazione vincolare  $\lambda_s$  applicata ortogonalmente all' elemento di superficie di equazione  $f_s(x,y)=0$

<sup>10</sup> La forma estesa, tridimensionale é notoriamente la:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Y} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sono i coseni direttori, rispettivamente, di  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$

Per un solido elastico assimilabile ad una lastra piana di spessore costante e piccolissimo rispetto alle altre dimensioni, limitata da una superficie cilindrica a generatrici normali alle facce e dove :

- le forze esterne siano tutte parallele al piano medio xy,
- quelle superficiali agiscano esclusivamente sul bordo della lastra,
- tutte le forze siano inoltre ripartite uniformemente nel senso dello spessore z.

avremo, ovviamente:

$$\sigma_z = 0 \quad (46)$$

valida non soltanto per gli elementi delle facce, ma per tutti gli elementi piani normali all'asse z, i quali, per l'ipotesi fatta circa lo spessore, sono tutti vicinissimi alle facce stesse.

Dunque le (42) si riducono alle

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right) \quad (47')$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) \quad (47'')$$

Dato che per la determinazione delle tensioni incognite  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{x,y}$ , nel punto generico del sistema sono disponibili due sole equazioni di equilibrio, gli stati piani di deformazione e di tensione si presentano semplicemente iperstatici.

Definita:

$$s = \sum \sigma \quad (48)$$

e tenendo conto della (46) le (47) diventano:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{s - \sigma_x}{m} \right) \quad (49')$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{s - \sigma_y}{m} \right) \quad (49'')$$

o, che é lo stesso:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{m E} \left( \sigma_x^{(m+1)} - s \right) \quad (49')$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{m E} \left( \sigma_y^{(m+1)} - s \right) \quad (49'')$$

sommando tra loro le (49), avremo:

$$\theta = \frac{m-2}{m E} s$$

si perviene dunque alle:

$$\varepsilon_x E m + s = \sigma_x^{(m+1)} \quad (49''')$$

$$\varepsilon_y E m + s = \sigma_y^{(m+1)} \quad (49'''')$$

ed ancora:

$$\varepsilon_x E m + \frac{m E}{m-2} \theta = \sigma_x^{(m+1)} \quad (50')$$

$$\varepsilon_y E m + \frac{m E}{m-2} \theta = \sigma_y^{(m+1)} \quad (50'')$$

donde:

$$\left( \varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right) \frac{E m}{m+1} = \sigma_x \quad (51')$$

$$\left( \varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2} \right) \frac{E m}{m+1} = \sigma_y \quad (51'')$$

ed infine:

$$\sigma_x = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right) \quad (52')$$

$$\sigma_y = 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2} \right) \quad (52'')$$

definita ora la costante:

$$\lambda = \frac{2 G}{m-2} \quad (53)$$

detta, come ben noto, *costante di Lamé*, segue:

$$\sigma_x = \lambda \theta + 2 G \varepsilon_x \quad (54')$$



$$\sigma_y = \lambda \theta + 2 G \varepsilon_y \quad (54'')$$

$$\tau_{x,y} = G \gamma_{x,y} = 2 G \varepsilon_{x,y} \quad (54''')$$

Impostiamo il problema dell' equilibrio elastico, assumendo come incognite:

- dapprima gli spostamenti  $\mathbf{V}$  (u,v)
- quindi le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{x,y}$ )

quindi confrontando le espressioni così ottenute avremo delle relazioni che ci torneranno successivamente utili.

#### 4.1.4.1.1 Risoluzione del problema dell' equilibrio elastico in termini di spostamenti

Le equazioni indefinite di equilibrio (di Cauchy) in termini di deformazioni diventano:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \theta + 2 G \varepsilon_x) + 2 G \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial y} + X = 0 \quad (55')$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\lambda \theta + 2 G \varepsilon_y) + 2 G \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial x} + Y = 0 \quad (55'')$$

donde:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 G \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + 2 G \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial y} + X = 0 \quad (56')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2 G \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + 2 G \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial x} + Y = 0 \quad (56'')$$

dalla quale si perviene alla:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 G \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial y} \right) + X = 0 \quad (57')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2 G \left( \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{x,y}}{\partial x} \right) + Y = 0 \quad (57'')$$

o, che é lo stesso, alla:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 G \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{2 \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + X = 0 \quad (58')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2 G \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{2 \partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + Y = 0 \quad (58'')$$

dunque:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{2 \partial x \partial y} \right) + X = 0 \quad (59')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2 G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{2 \partial x \partial y} \right) + Y = 0 \quad (59'')$$

pertanto:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = 0 \quad (60')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = 0 \quad (60'')$$

ne segue, tenuto conto che:

$$\Delta^2 u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

e che :

$$\mathbf{div V} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta^2 u + G \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{div V} + X = 0 \quad (61')$$

ed analogamente:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta^2 v + G \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{div V} + Y = 0 \quad (61'')$$

e tenuto conto che:

$$\mathbf{div V} = \theta$$

e quindi che

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta^2 u + G \frac{\partial \theta}{\partial x} + X = 0 \quad (61''')$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta^2 v + G \frac{\partial \theta}{\partial y} + Y = 0 \quad (61'''')$$

raccogliendo in  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ , avremo:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta^2 u + X = 0 \quad (62')$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta^2 v + Y = 0 \quad (62'')$$

tenuto conto della (53) avremo<sup>11</sup>:

$$G \left( \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta^2 u \right) + X = 0 \quad (63')$$

$$G \left( \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta^2 v \right) + Y = 0 \quad (63'')$$

Derivando le precedenti, l'una rispetto ad x e l'altra rispetto ad y

$$G \left( \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (64')$$

$$G \left( \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \Delta^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (64'')$$

e sommando, avremo:

$$G \left( \frac{m}{m-2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \left( \Delta^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0 \quad (65)$$

---

<sup>11</sup> In termini vettoriali le (63) equivalgono alla:

$$G \left( \frac{m}{m-2} \mathbf{grad div V} + \Delta^2 \mathbf{V} \right) + \mathbf{Y} = 0$$

non molto dissimile da altre equazioni della fisica-matematica (vedasi ad esempio eq. di Stokes-Navier)

che può essere scritta :

$$G \left( \frac{m}{m-2} \Delta^2 \theta + \Delta^2 \theta \right) + \mathbf{div} \mathbf{Y} = 0 \quad (65')$$

donde :

$$\left( 1 + \frac{m}{m-2} \right) G \Delta^2 \theta + \mathbf{div} \mathbf{Y} = 0 \quad (65'')$$

ed infine<sup>12</sup>:

$$\frac{2(m-1)}{m-2} G \Delta^2 \theta + \mathbf{div} \mathbf{Y} = 0 \quad (65''')$$

---

<sup>12</sup> La (65'') uno volta che siano nulle o costanti le forze di massa **Y diviene:**

$$\Delta^2 \theta = 0 \quad (65'''')$$

detta condizione di armonicità. Anche questa ben nota in altri campi della fisica-matematica. Basti pensare, nel corpo dei corpi viscosi all' Idraulica delle acque sotterranee nei mezzi porosi e, più in generale, ai così detti moti a potenziale.

#### 4.1.4.1.2 Risoluzione del problema dell' equilibrio elastico in termini di tensioni

Oltre alle equazioni indefinite (43) ed ai limiti (45), le quali sono dunque le medesime tanto per gli stati piani di deformazione come per gli stati piani di tensione, devono essere soddisfatte quelle di congruenza (*equazioni di De Saint Venant*), che come é noto sono espresse nel caso in esame (lastre) dalle:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial y} \quad (66')$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0 \quad (66'')$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = 0 \quad (66''')$$

sostituendo nella (66') le (49'') avremo<sup>13</sup> :

$$\frac{\partial^2 \left( \sigma_x (m+1) - s \right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left( \sigma_y (m+1) - s \right)}{\partial x^2} = \frac{mE}{G} \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial y} \quad (66')$$

e tenuto conto della relazioni tra E, m e G , cioè della:

$$G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E \quad (67)$$

avremo:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{1}{m+1} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) = \frac{mE}{G} \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial y} \quad (68)$$

---

<sup>13</sup> ricordando che :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial y} = \frac{\tau_{x,y}}{G}$$

La congruenza é completata dalle <sup>14</sup>:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (69')$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{y,x}}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \quad (69'')$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial z^2} = 0 \quad (69''')$$

Dalla (69') sostituendovi le (46) avremo:

$$\frac{\tau_{x,y}}{G} = \frac{2}{E} \frac{\partial^2 \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)}{\partial y \partial z}$$

e tenuto conto delle relazioni tra E,G ed m, avremo<sup>15</sup>:

$$\tau_{x,y} = \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)}{\partial y \partial z}$$

#### 4.1.4.2 Equazioni dell'equilibrio elastico dei sistemi piani

Le equazioni indefinite di equilibrio (43) tenuto conto delle (46) si esprimono in termini di deformazioni, come segue:

---

<sup>14</sup> In forma estesa le equazioni di congruenza (o di De Saint Venant) sono:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{x,z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{y,z}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

le altre due si ottengono dalla precedente con ovvia rotazione degli indici

<sup>15</sup>  $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 G \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial y} + X = 0 \quad (43')$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial y} + Y = 0 \quad (43'')$$

Per uno stato piano di tensione, essendo:

$$J_{\sim} = 0, \quad \sim C_{s\sim} = 0, \quad \sim v_{\sim} = 0$$

$$a Z \quad \sim \quad a z_{\sim} = -m(m-1) \operatorname{div} Y,$$

scrivendo le (6-26) e sommandole membro a membro, si ottiene:

$$m \sim, \quad \sim \sim \sim 2m+1$$

$$S_{\sim} + m+1 \sim S_{\sim} + a z_{\sim} \sim m-1 \operatorname{div} Y$$

da cui, con ovvie riduzioni:

$$(75) \quad \sim \quad z_{\sim} +$$

$$G_{u\sim} = -$$

$$m \sim X \sim Y \sim m-1 \sim ax + ay J$$

(7-6) le (7-1) divengono:

$$(7-7)$$

Per uno stato piano di deformazione, posto:

$$m \sim$$

$$\sim E_i E_l (\text{°Z ml})$$

$$E_u = E (\text{°u- m});$$

espressioni delle dilatazioni formalmente identiche alle (74), salvo la diversità dei valori di  $E$  e di  $m$ .

Le condizioni di congruenza per questo caso si traducono allora nell'equazione:

$$(7-8) \quad \sim'(az+ou) = - ml-l (a \sim \sim y)$$

identica alla (7-5), salvo il diverso valore del coefficiente di contrazione trasversale.

Si possono dunque trattare gli stati piani di deformazione come gli stati piani di tensione modificando le costanti d'elasticità  $E$  ed  $m$  secondo le (7~).

Se sono nulle o costanti le forze di massa, sia la (7-5) che la (7-8) si riducono alla forma:

$$(7-9)$$

$$\sim'(az+a'')=0$$

la distribuzione degli sforzi è cioè identica per entrambi i tipi di sistemi piani. In tal caso *le equazioni dell'equilibrio elastico non contengono le costanti d'elasticità*; ciò significa che in assenza di vincoli che limitino la deformabilità del sistema, la distribuzione degli sforzi è indipendente dalle proprietà elastiche del corpo; per un dato sistema elastico essa può essere pertanto studiata sperimentalmente su di un modello eseguito con materiale qualunque purchè omogeneo ed isotropo.

Tale possibilità viene invece meno quando le condizioni di vincolo siano in numero superiore a quello strettamente necessario ad assicurare l'immobilità del sistema, perchè, risultandone condizionata la deformabilità, le costanti d'elasticità compaiono in generale nelle equazioni di vincolo.



#### 4.1.4.4 La funzione di Airy

Se le forze di massa si riducono al solo peso proprio e questo agisce nella direzione  $y$ , indicando con  $p$  la massa dell'unità di volume, con  $g$  l'accelerazione di gravità, le (7-2) divengono:

$$(7-10)$$

$$\sim a z \sim z$$

$$+ =$$

$$\sim x \ a y$$

$$a \ 59 + a \ \sim, " + O$$

Se  $F$  è una funzione continua delle coordinate  $x, y$ , e poniamo:

$$(7-11) \ a \sim = a \ y \ \sim \\ u = a a \sim$$

$$\sim ' F$$

$$\sim x \sim y \ P g$$

è facile verificare che effettuando le derivate dei parametri della tensione e sostituendole nelle (7-10), queste risultano identicamente soddisfatte.

Sostituendo poi nell'equazione di congruenza (7-9), si ottiene:

$$(7-12) \ \sim '(a \sim + a F J) = a a \sim, + 2 a \sim a y l + a a y, = 0,$$

ossia:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0:$$

la funzione  $F$  deve pertanto soddisfare alla *condizione di biarmonicità*. Con l'ausilio di essa lo studio dei sistemi piani viene ridotto a ricercare una soluzione della equazione differenziale del quarto ordine (7-12), la quale soddisfi alle equazioni ai limiti.

La funzione così definita viene chiamata *funzione degli sforzi* o *funzione di Airy*.

#### 4.1.4.5 Applicazione della funzione di Airy alle dighe

#### 4.1.5 L'andamento temporale dei lavori

## 4.2 Le dighe a gravità alleggerite

Si è constatato che il calcestruzzo all' interno della diga a gravità lavora molto al di sotto delle sue possibilità mentre lavora al massimo sui paramenti esterni.

Vi é pertanto un considerevole "spreco" di materiale.

Si può dunque pensare di utilizzare un minor quantitativo di materiale all' interno della diga, alleggerendola.

Varie sono le proposte in tal senso:

- da semplici speroni a T od a doppio T affiancati
- a speroni reggenti a monte una opportuna soletta
- a speroni reggenti a monte degli archi

Ma in sistema che più ha avuto successo é quello proposto da un ingegnere genovese, Claudio Marcello, costituito da speroni larghi copn al proprio interno delle cavità vuote.

Vediamo qui di seguito alcuni disegni schematici di tali proposte (con indicate alcune realizzazioni) successivamente ci soffermeremo sulle dighe tipo "Marcello"

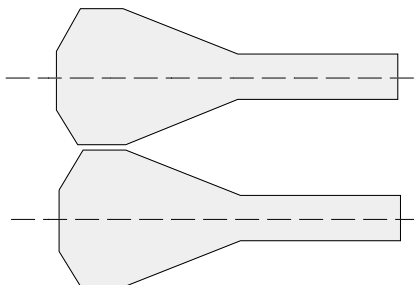


Fig..... Diga a speroni a T affiancati.  
Esempi realizzati : Diga Sloy , alta 52 [m]  
paramento a monte sub-verticale ( $\theta_m = ,025$ )  
paramento a valle  $\theta_v = ,80$   
interasse 19.8 [m]  
spessore minimo 4 [m]

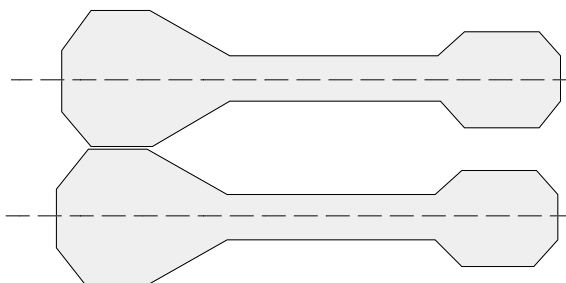


Fig..... Diga a speroni a doppio T affiancati.  
Esempi realizzati : Diga Scais alta 64,7 [m]  
paramento a monte  $\theta_m = ,19$   
paramento a valle  $\theta_v = ,57$   
interasse 12,0 [m]  
spessore minimo 6 [m]

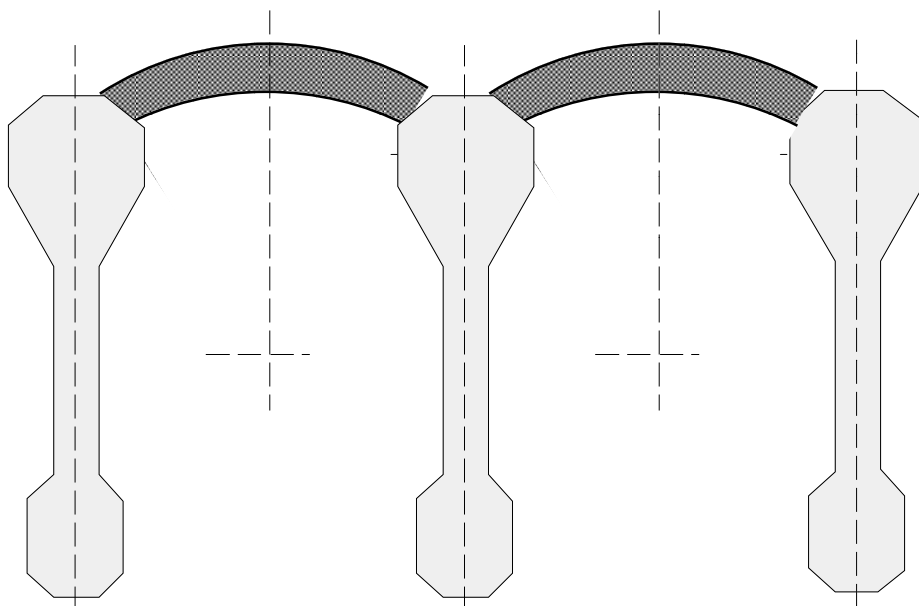


Fig.....- Diga ad archi multipli

Tali dighe erano in auge negli anni '20 e sembravano doversi avere grande diffusione.

Ne furono realizzate diverse. Ma la rovina della diga di Gleno ha messo in evidenza la debolezza di queste strutture, derivante dalla modestia degli spessori delle voltine. Modestia che risulta inadatta a resistere a sollecitazioni derivanti non da effetti tensionali dei carichi (in senso stretto) bensì da sollecitazioni termiche (variazioni di temperature).

Gli speroni sono di norma in calcestruzzo semplice (non armato) le voltine sono sottili ed armate.

Come esempi citiamo:

Nome diga	altezza	interasse	scarpa		spessore	freccia	spessore
	massima	tra i contrafforti	contrafforte		speroni	voltine	voltine
	[m]	[m]	a monte	a valle			[m]
Tirso(Sardegna)	70	15	0,65	0,43	2,5÷8,00	1/3 corda	,50÷1,64
Venina	44,59	max 33,6	0			1/2 raggio	
Beni-Bahdel(algeria)	57	20 (1)	0,95	0,3	3÷4,80	8,6	,70÷1,33
Pesancola (U.S.A.)	42,7	25,6	0,9	0,25	6,70 (2)	7,25	,70÷1,32
Bartett(U.S.A.)	87,5	19,3	0,9	0,38	,61÷2,13	7,25 (3)	0,91÷2,13

(1) trattasi di speroni in calcestruzzo armato

(2) trattasi di speroni cavi (scatolari) con pareti di spessore sottile ( $\leq$  ad 1 (m) ) e variabile

- (3) trattasi di speroni cavi (scatolari) con pareti di spessore non sottile (sino ad un massimo di 2.13 [m] e variabile

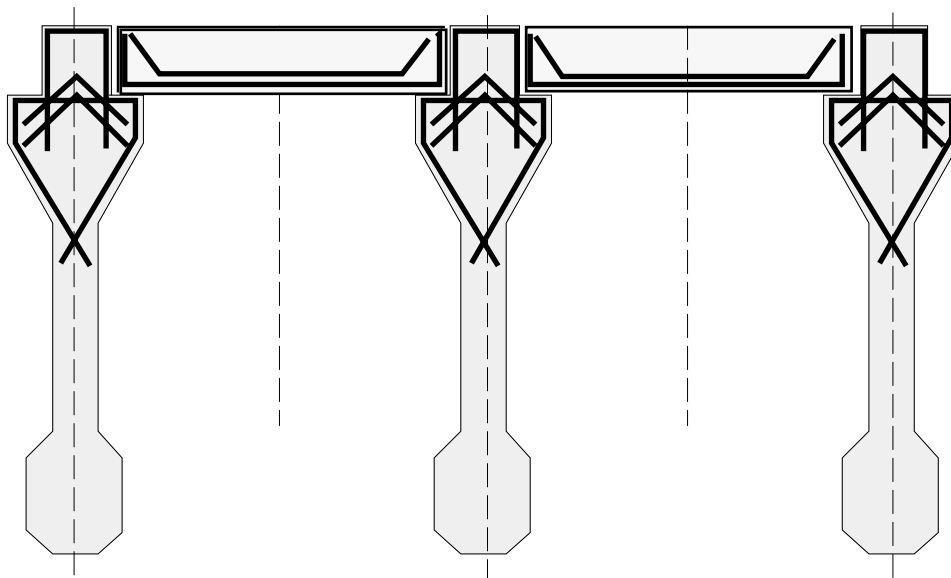


Fig. 4 - Dighe a speroni e lastroni

Non abbiamo applicazioni significative in Italia. E' stata usata negli Stati Uniti.

La figura mostra un esempio di armatura dei lastroni e della testata degli speroni (sollecitati soprattutto localmente ed a taglio).

La diga tipo Marcello merita invece uno studio meno superficiale sia per la genialità della soluzione che per la diffusione.

Nella figura che segue sono riportate le sezione e la pianta di un elemento di tale tipo di diga, liberamente tratto da un disegno della diga del Sabbione.

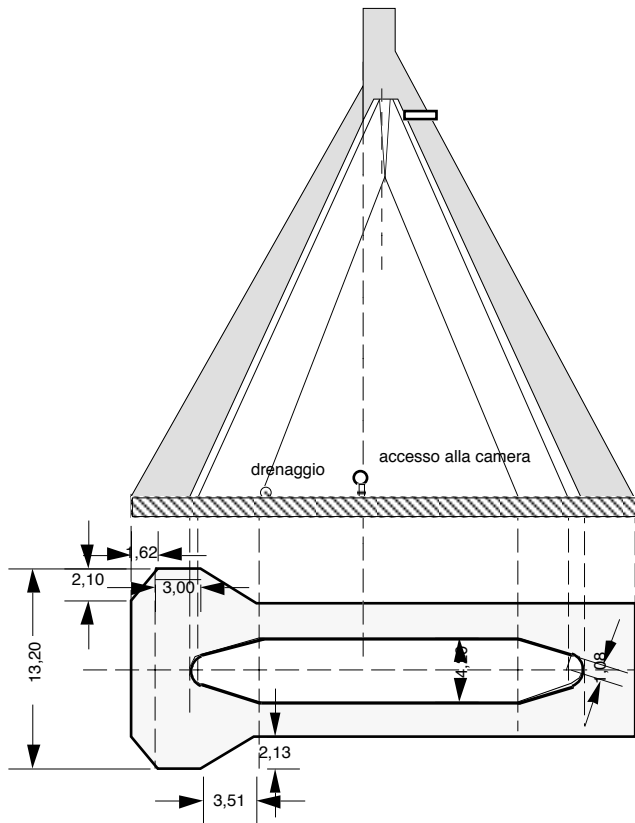
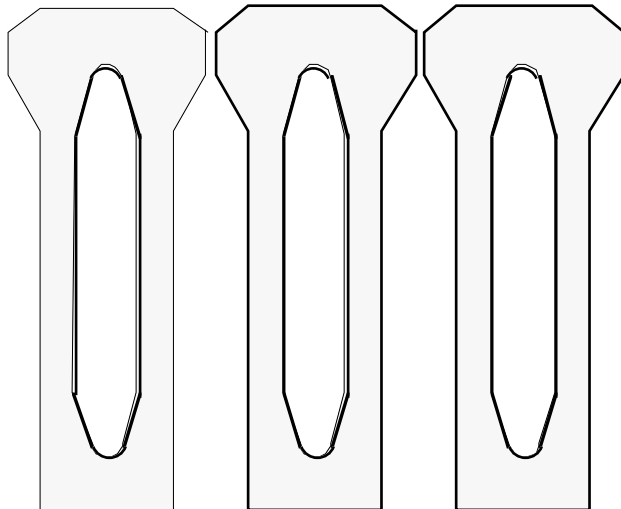


Fig 5 - Diga a gravità alleggerita tipo Marcello, Sezione e Pianta altezza 51 [m], pianta 54.75[m]

Ciascun elemento é come costituito da due speroni affiancati.



Una successione di elementi affiancati mette in evidenza due ordini di cavità, una esterna ed un'altra interna a ciascun elemento.

Queste cavità vengono ad interessare anche le fondazioni, in modo che l'acqua che si infiltra possa entrare nelle cavità, si elimina così la sottopressione.

Un'altro vantaggio delle dighe a gravità alleggerite oltre a quelli già evidenziati, cioè:

- risparmio di materiale di circa il 20%.
- diminuzione dell' effetto di sottopressione

é la minore sensibilità ai fenomeni termici conseguenti ed al fenomeno di presa del calcestruzzo ed agli eventi termici successivi.

Infatti le cavità costituiscono dei giunti di dilatazione permanenti e gli spessori del calcestruzzo sono molto più modesti.

Il fenomeno della sottopressione cui si é già fatto cenno é più limitato e perché minori sono le superfici sulle quali agisce l'acqua che permea al di sotto della diga e perché la presenza dei vuoti quasi in prossimità del paramento di monte costringe l'acqua permeante a portare a zero la propria pressione.

E' significativo il grafico che segue dove si mostra l'andamento qualitativo della sottopressione alla base di un elemento di diga alleggerita.

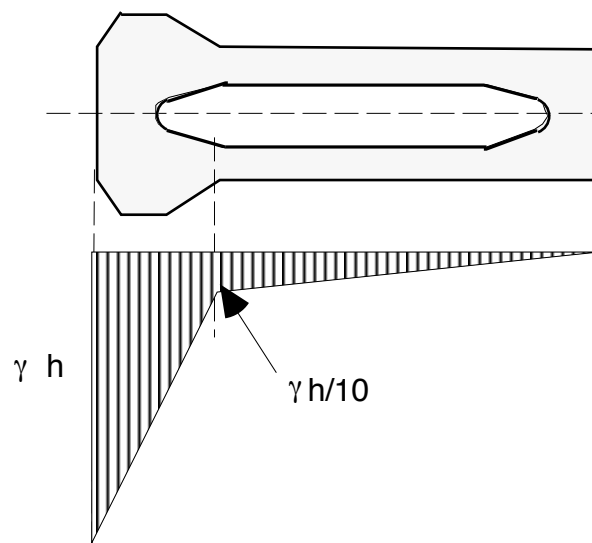


Fig..... andamento delle sottopressioni in findazione di una diga tipo Marcello.

Ne consegue una congrua diminuzione della spinta, dovuta appunto ed alle minori pressioni ed a minori superfici sulla quale si applica. Vantaggi questi solo modestamente inficiati dallo spostamento verso monte del centro delle pressioni.

Per le dighe a gravità alleggerite si impone di norma un paramento a monte molto inclinato, tale che grossolanamente la sezione maestra potrebbe assumere l'aspetto di una sezione simmetrica.

Ciò comporta che anche a diga vuota si abbiano in fondazioni pressioni pressoché bilanciate, che non si sbilanciano eccessivamente nel caso di diga piena perché la presenza di una considerevole spinta verticale dell' acqua sul paramento di monte contribuisce a mantenere lontana dalla forma triangolare pura l'andamento delle pressioni sul terreno di fondazione.

Pertanto pur essendo comunque necessario un ottimo terreno di fondazione per realizzare delle dighe a gravità alleggerite, tuttavia, al contrario di quanto si verifica di norma per le dighe a gravità massicce, la sollecitazione sulla fondazione è più uniforme e la disuniformità di funzione delle vicende di carico del serbatoio, è meno sensibile che in quelle massicce.

Il calcolo statico si sugli stessi concetti già esposti per le dighe massicce con l'avvertenza di tener conto dei vuoti nel calcolo del peso della diga, del momento di inerzia e dei noccioli.

Come sempre nelle verifiche occorre fare riferimento all' intero tensore degli sforzi e/o riferirsi alle tensioni principali.

E' comunque sempre importante individuare l'andamento delle linee isostatiche ,infatti ricordato che nelle dighe non devono essere presenti sforzi di trazione, è lungo le linee isostatiche, certamente di compressione, che possono realizzarsi giunti e riprese di getto, senza che si presenti in pericolo di scorrimenti.

Un calcolo più affinato di quello già visto per le dighe a gravità è possibile farlo con l'utilizzo di metodi numerici e di computer.

Tuttavia è in genere opportuno fare prove fisiche su modello per avere una verifica sperimentale<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Tali prove su modelli sono regolate dalle leggi di similitudine (teorema di Bunkingam, vedi in Idrraulica). Di norma si sostituisce all'acqua del mercurio, al calcestruzzo una malta di cemento e gesso od altro materiale in modo da avere le stesse deformazioni che si verificherebbero nella diga.



### 4.3 Dighe ed archi multipli

Si é già fatto cenno ad esse in precedenza, ma meritano un approfondimento.

Sono formate da una serie di speroni a sezione triangolare disposti a ditanza, l'uno dall'altra, dai 9 ai 15 m.; essi vengono appositamente controventati.

Tra uno sperone e l'altro vengono armate delle voltine in cemento armato.

Si ricorre a questo tipo di diga quando la gola da sbarrare sia di larghezza piuttosto rilevante e non conviene fare dighe ad arco perchè si perderebbe un considerevole volume d' acqua.

Condizione essenziale è che il terreno di fondazione sia perfettamente stabile (roccia sana e compatta).

L'altezza consigliabile per questo tipo di diga è di circa 30 [m] però se il terreno di fondazione lo consente si può arrivare ad altezze maggiori (fino ai 60 m.).

L'inclinazione più conveniente da assegnare agli speroni è di 50°.

La corda degli archetti è costante, quindi possiamo assegnare a questi una apertura pari all'angolo di massima economia (vedi oltre: dighe ad arco), pari, all' incirca a 133°.

#### 4.3.1 Approfondimento di predimensionamento

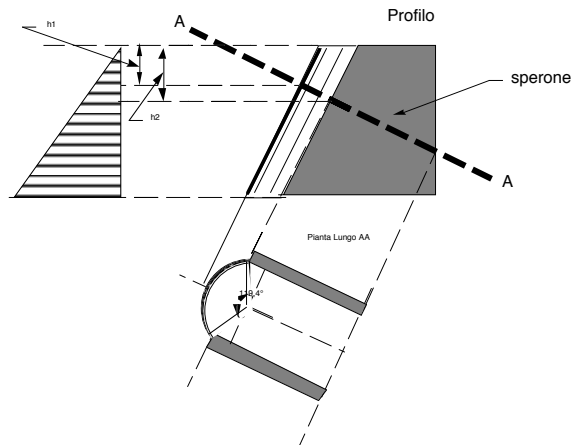
Per quel che riguarda il calcolo statico bisogna dire che si fa separatamente il calcolo della volta ed il calcolo dello sperone.

Per lo sperone non vi è da aggiungere a quanto precedentemente detto nei riguardi della diga a gravità. Vediamo ora il calcolo degli anelli;

Contrariamente a quanto si verifica nelle dighe ad arco, in cui per ogni anello la sezione si manteneva costante, nelle dighe ed archi multipli, essendo l'anello normalmente alle generatrici della volta stessa, il carico idraulico sarà diverso sui vari punti delle sezioni rette dell'anello stesso.

Essi infatti non trovansi tutte alla stessa profondità (più profonda l'imposta e meno la chiave) saranno sollecitate dalla pressione idraulica diversamente.

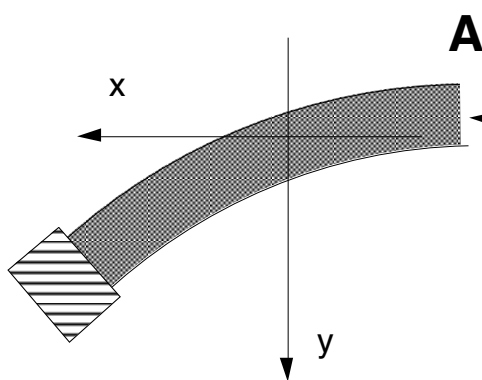
Sarà quindi necessario uno spessore dell'anello maggiore in imposta e minore in chiave.



Il calcolo si effettua considerando questi anelli incastrati sui due speroni e quindi si applica la teoria degli anelli elastici incastrati.

Per la determinazione delle incognite iperstatiche si rende isostatico il sistema considerando metà arco e sostituendo all'azione che il semiarco di destra esercita sul semiarco di sinistra le azioni esplicite.

Riprendiamo in esame la sezione A, essa può spostarsi solo in direzione y



Se indichiamo con:

$M_{D0}$  lo sforzo normale

$M_0$  il momento flettente

entrambi applicati nella sezione di chiave (che abbiamo sconnesso) e con:

$m$  i momenti dovuti alle forze esterne

$M$  il momento sollecitante la generica sezione

Semi arco considerato incastrato all' imposta e libero in mezzeria (A)

potremo scrivere:

$$M = M_o + H_o y - m \quad (1)$$

Nel considerare il momento  $m$  delle forze esterne oltre a mettere in conto le forze idrostatiche occorre mettere in conto la componente del peso della volta nella direzione della spinta idrostatica.

Da considerazioni di simmetria è ovvio che nella sezione di chiave la rotazione  $\Delta \varphi$  e gli spostamenti  $\Delta x$  saranno nulli, quindi::

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\Delta x = 0$$

Si fa riferimento ai teoremi di Culmann, il cui enunciato è qui di seguito riportato, dimostrati in Scienza delle Costruzioni nella teoria dell'ellisse di elasticità (vedi oltre e soprattutto vedi appendice):

- 1) La rotazione che in una sezione provoca una coppia applicata è data dall'intensità della coppia per il peso elastico della trave.
- 2) Lo spostamento provocato in una sezione da un momento applicato è eguale al prodotto dell'intensità della coppia per il momento alla retta statico del peso elastico concentrato nel baricentro elastico rispetto alla retta secondo cui vogliamo lo spostamento.

Da altre teorie della Scienza delle Costruzioni (si veda ad esempio il teorema di Castigliano, oppure metodo dei lavori virtuali) sappiamo che:

$$\Delta \varphi = \int \frac{M ds}{E J} = 0 \quad (2')$$

$$\Delta x = \int M y \frac{ds}{E J} = 0 \quad (2'')$$

Supponiamo ora di scindere il nostro arco in tanti conci e sostituiamo a detti integrali le sommatorie, cioè:

$$\Delta \varphi = \sum \frac{M \Delta s}{E J} = 0 \quad (3')$$

$$\Delta x = \sum \frac{M y \Delta s}{E J} = 0 \quad (3'')$$

Al fine della applicazione delle (3) è opportuno dividere il semiarco in  $n$  conci di egual peso elastico, ciò si ottiene con la costruzione approssimata illustrata nel seguito, potremmo, allora, nelle precedenti espressioni mettere in evidenza  $\frac{\Delta s}{E J}$ , quindi avremo:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{E J} \sum_1^n M = 0 \quad (4')$$

$$\Delta x = \frac{\Delta s}{EJ} \sum_1^n M y = 0 \quad (4'')$$

segue

$$\sum_1^n M = 0 \quad (5')$$

e nello stesso modo

$$\sum_1^n M y = 0 \quad (5'')$$

Tenuto conto della (1) le (5') e (5'') diventano:

$$\sum_1^n (M_0 + H_0 y - m) = 0 \quad (6')$$

$$\sum_1^n (M_0 + H_0 y - m) y = 0 \quad (6'')$$

ed essendo n i conci queste diventano:

$$n M_0 + H_0 \sum_1^n y + \sum_1^n m = 0 \quad (7')$$

$$M_0 \sum_1^n y + H_0 \sum_1^n y^2 + \sum_1^n m y = 0 \quad (7'')$$

ricavando dalla prima  $H_0$

$$H_0 = \frac{\sum_1^n m - H_0 \sum_1^n y}{n} \quad (8)$$

e sostituendo nella seconda, avremo:

$$\sum_1^n m \sum_1^n y - H_0 \left( \sum_1^n y \right)^2 + n H_0 \sum_1^n y^2 - n \sum_1^n (m y) = 0 \quad (9)$$

da cui:

$$H_0 = \frac{n \sum_{\uparrow} (m y) - \sum_{\uparrow} m \sum_{\uparrow} y}{n \sum_{\uparrow} y^2 - \left( \sum_{\uparrow} y \right)^2} \quad (10)$$

Per cui sia  $M_0$  che  $H_0$ , incognite iperstatiche sono funzioni delle sommatorie delle distanze dall'asse baricentrico e del momento delle forze esterne.

Come forze esterne si considerano (in prima approssimazione) la pressione idrostatica e la componente del peso nella direzione della forza stessa.

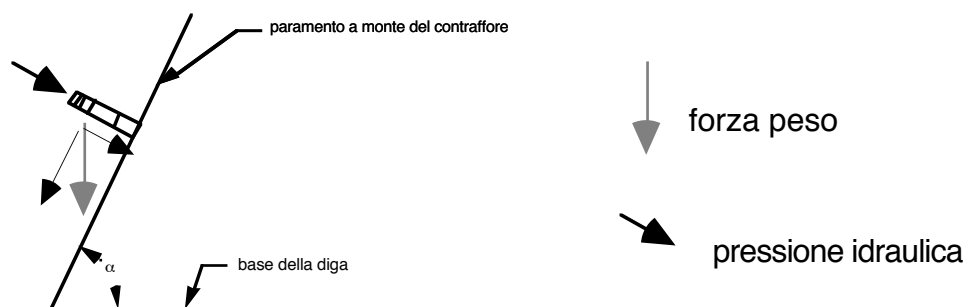
L'anello, come detto, è, in generale, di spessore variabile (massimo all'incastro e minimo in chiave).

Oggi metodi numerici permettono relativamente facili determinazioni di  $\sum_{\uparrow} m$  tuttavia qui di seguito si riporta non solo per ragioni storiche ma anche per l'eleganza del metodo, il procedimento grafico in uso sino ad un paio di decenni orsono.

Sull'arco rettificato possiamo riportare un vettore corrispondente al il valore della spinta dovuta alla pressione idrostatica.

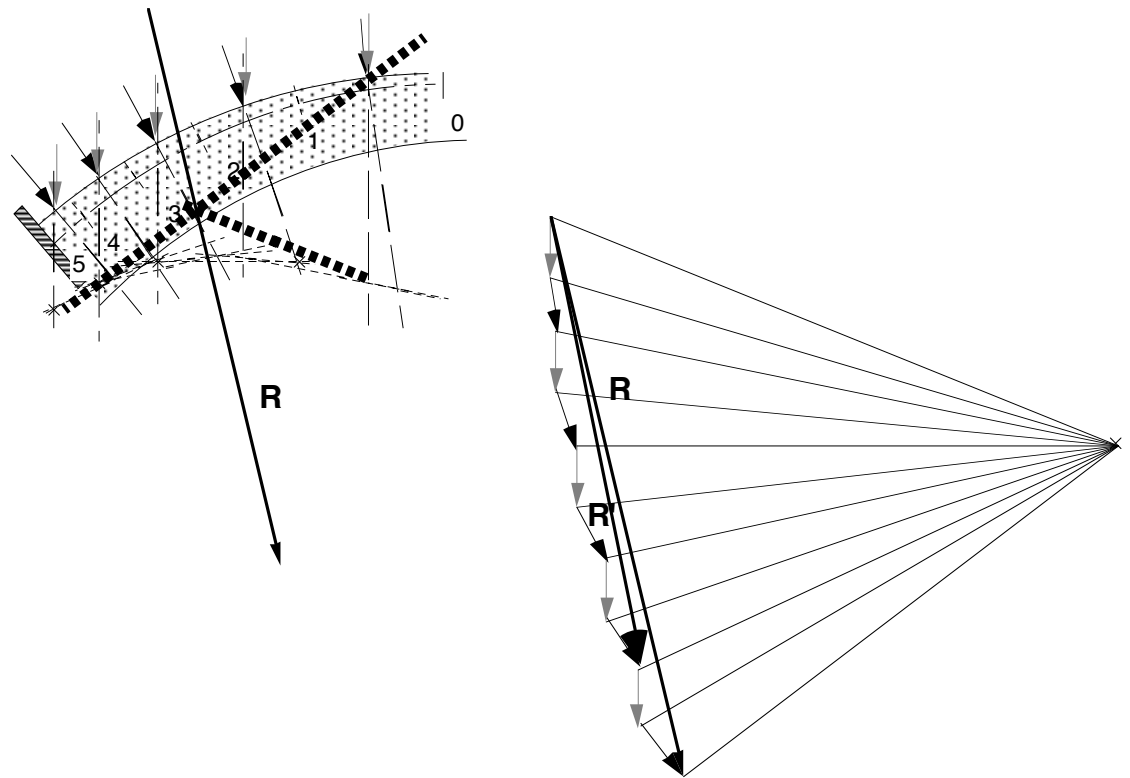
Dette spinte sono applicate al baricentro di ogni singolo concio e sono normali all'arco e quindi li possiamo riportare sull'arco stesso.

Oltre alle suddette pressioni  $P$  dobbiamo considerare le componenti del peso nella direzione della spinta (peso per  $\cos \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'inclinazione della volta).



Si può quindi tracciare quindi il poligono delle forze e calcolare la risultante e la retta di azione, con poligono funicolare.

- ↓ componente nel piano dell' arco del peso del concio
- ↙ spinta dovuta alla pressione idraulica



Per ottenere  $m_5$  sarà sufficiente moltiplicare il valore della risultante per il braccio di detta risultante rispetto al baricentro del 5° concio.

Per ottenere  $m_4$  sarà sufficiente basterà:

- calcolare la risultante delle azioni applicata ai primi quattro conci, questa ovviamente è  $R'$ ,
- tracciare la sua retta di applicazione

e quindi procedere come sopra.

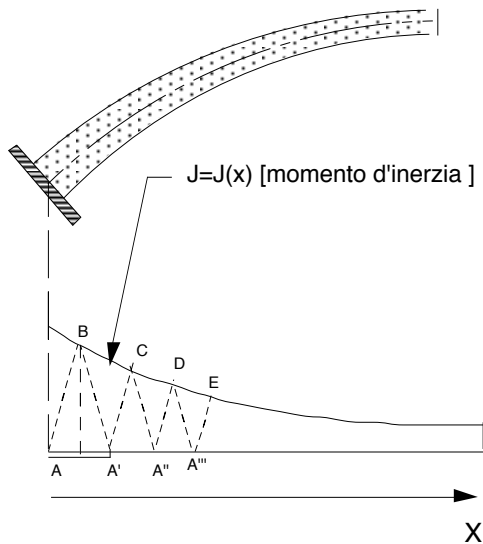
Con tale procedimento si ottengono i valori dei vari  $m_i$  e quindi la loro somma da cui  $H_0$  ed  $M_0$ .

Calcolate queste la struttura può essere risolta come isostatica e quindi è possibile calcolare facilmente le caratteristiche delle sollecitazioni, e lo stato tensionale onde poter procedere alle verifiche.

#### 4.3.2 Suddivisione in conci di egual peso elastico

Per eseguire la suddivisione conci di egual peso elastico si può operare con il seguente procedimento grafico.

Si rettifica il semiarco al quale deve, ovviamente essere già assegnata una dimensione, seppur di massima. (per es. con la formula di Mariotti).



In genere tali archi sono armati metallica simmetricamente. Il Momento d'inerzia  $J$  varierà lungo l'ascissa curvilinea  $x$  dell' arco con la legge:

$$J = \frac{1}{12} g^3 + 2 \omega n \left( \frac{g}{2} - \delta \right)^2$$

dove:

$g = (g(x))$       é lo spessore dell' arco

$n = \frac{E_{Fe}}{E_{cls}}$       rapporto tra i moduli elastici

$\omega =$               area dell'armatura

$\delta =$               copriferro

Questo procedimento si applica a qualsiasi arco elastico, purché si conosca la legge  $J=J(x)$  e si proceda come segue.

- una verticale sino al punto B;
- si congiunge B con A ed A';
- da A' si traccia una parallela alla AB sino ad incontrare il punto C
- da C si traccia una parallela alla BA' sino ad incontrare A''

e così via.

Se con questo procedimento l'ultimo lato cade alla fine dell'arco si sarà ottenuta la suddivisione in conci di equal peso elastico, altrimenti occorre ripetere l'operazione cambiando la lunghezza del segmento iniziale.

Il procedimento sopra descritto ci dà la divisione in parti di equal peso elastico *per costruzione* infatti tutti i triangoli sono simili (lati paralleli) ne segue che il rapporto tra base ed altezza è costante, ma detto rapporto è:

$$\frac{\Delta x}{J}$$

e ciò dimostra l'asserto.

E' evidente che questi conci sono più larghi nella sezione di imposta che in chiave.



## 5 Le dighe ad arco

Un tipo di diga che ha assunto uno sviluppo interessante è la diga ad arco, essa si può realizzare quando la larghezza della gola sia piuttosto limitata e quando la roccia delle pareti della gola dà assoluti requisiti di compattezza e continuità.

La diga ad arco reagisce con le caratteristiche ad arco, quindi poco a nulla scarica sul terreno sottostante (che sarebbe quello di fondazione nel caso delle dighe a gravità) e tutte le spinte sono assorbite dalle pareti laterali.

Quando si hanno i requisiti suddetti la diga ad arco è la più economica, essa porta rispetto a quella a gravità ad un risparmio fino al 66% di materiale.

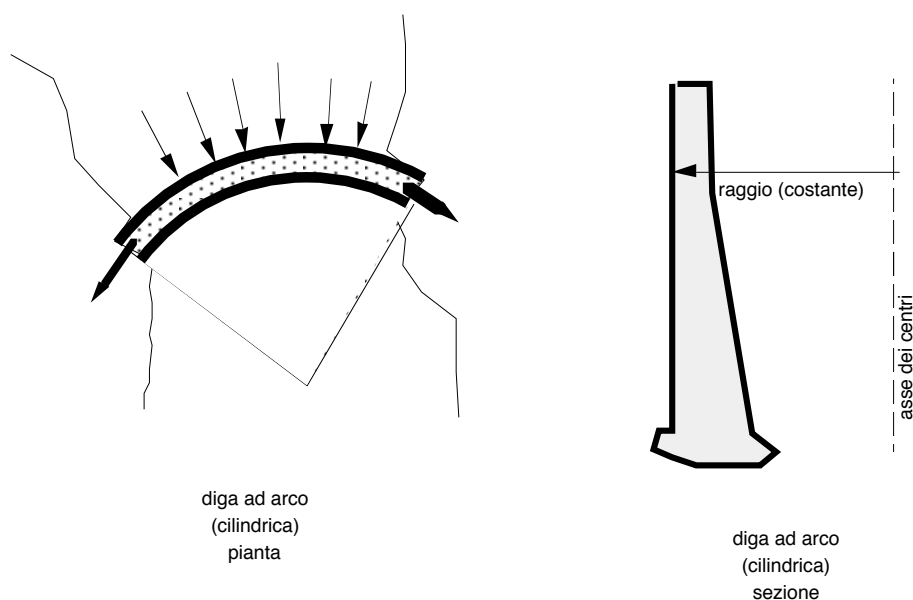


fig..... Esempio di diga ad arco con raggio costante ed asse dei centri rettilineo e verticale

## 5.1 Le possibili varianti morfologiche delle dighe ad arco

Le dighe ad arco possono, come è ovvio avere forme diverse, per esempio una o più curvature, l'asse dei centri può essere sempre sulla stessa verticale o meno, il raggio può essere fisso o variabile ecc...

La scelta dell' uno e dell' altro tipo viene fatto oltre che sulla base della forma della gola soprattutto su questioni di carattere economico, cioè minimizzando il quantitativo di materiale necessario a realizzare lo sbarramento.

E' pertanto necessario introdurre già in questa fase qualche elemento strutturale sia pure di larga massima, onde impostare il cennato problema di minimo.

Un metodo molto approssimato, ma utile, per tale dimensionamento di massima consiste nel supporre che la diga sia composta da tanti anelli indipendenti e rigidi di altezza unitaria e larghezza  $s(h)$ ;

Con riferimento alla figura che segue è possibile utilizzare la formula di Mariotti

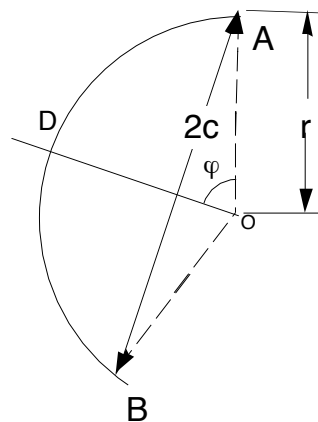


Fig. 4.1 - sezione schematica con indicazione di alcuni elementi geometrici essenziali

$$s(h) = \frac{\gamma_a h d(h)}{2\sigma_{amm}} = \frac{\gamma_a h R(h)}{\sigma_{amm}} \quad (1)$$

dove:

$h$  è la profondità dell' anello in esame a partire dal massimo livello idrico nell' invaso

$s(h)$  è lo spessore dell'anello alla profondità  $h$ ;

$R(h)$  è il raggio dell' anello alla profondità  $h$

$C(h)$  è la semicorda dell'arco di cerchio

con la quale calcolarci lo spessore  $s(h)$  dell'anello una volta fissato il raggio  $R(h)$ .

Tale raggio può essere sia fisso ma anche variabile con la profondità  $h$ .

Poiché l'arco cui si fa riferimento è un arco di circonferenza, detto  $\varphi$  il semi-angolo al centro avremo le seguenti relazioni.

$$\tan \varphi = \frac{R}{C} \quad (2)$$

Il volume di calcestruzzo è dato dalla:

$$V = 2 \varphi R(h) s(h) \quad (3)$$

e sostituendovi il valore di  $s(y)$  dato dalla (1) avremo:

$$V = \frac{2\varphi R^2 \gamma_a}{\sigma} \quad (4)$$

Supponiamo ora, in prima approssimazione, che la gola sia a corda costante, segue che:

$$C = R \operatorname{sen} \varphi \quad (5)$$

dove  $C$  è la lunghezza della semicorda (vedasi figura seguente), avremo:

$$V = \frac{2 \varphi R \gamma_a C^2}{\sigma \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (6)$$

Prendiamo in considerazione l'anello alla profondità  $y$ , restano costanti le quantità:

$$\gamma_a \quad C \quad \sigma = \sigma_{\text{amm}}$$

ne segue che il volume dell'anello sarà proporzionale a:

$$\frac{\varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Imponiamo che tale quantità sia minima, cioè:

$$\frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0 \quad (7)$$

quindi:

$$\frac{\delta V}{\delta \varphi} = \frac{\text{sen}^2 \varphi - 2 \varphi \text{sen} \varphi \cos \varphi}{\text{sen}^4 \varphi} = 0 \quad (8)$$

Da cui

$$2 \varphi = \text{tang} \varphi \quad (9)$$

risolvendo tale equazione avremo

$$2\varphi = 133^\circ$$

Di norma si realizzano angoli compresi tra i 90 ed i 180 gradi.

Tuttavia, frequentemente la gola é più prossima ad una forma triangolare che al precedente schema della corca costante, in tal caso sono possibili due scelte:

- tener costante r e variando  $\varphi$

oppure

- tenendo costante  $\varphi$  facendo variabile R (in questo caso avremo una diga a doppia curvatura).

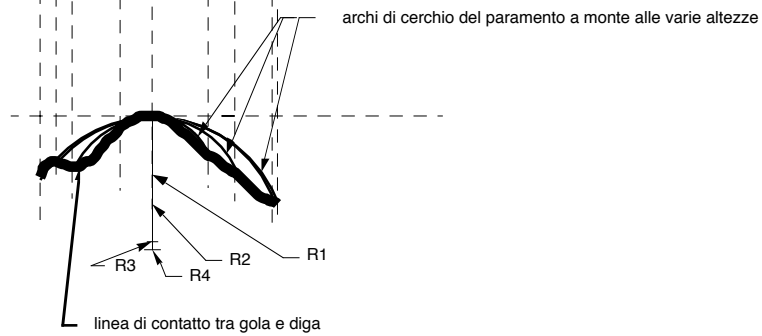
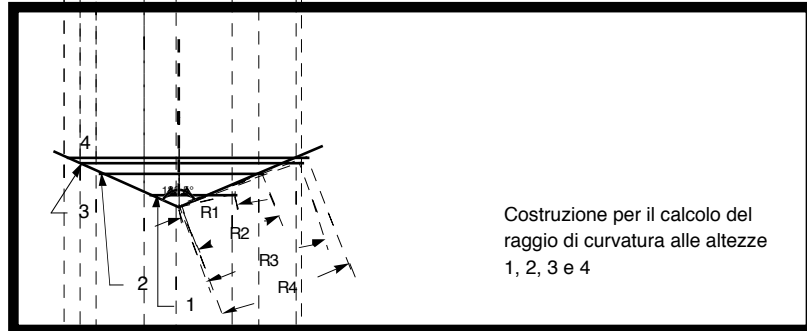
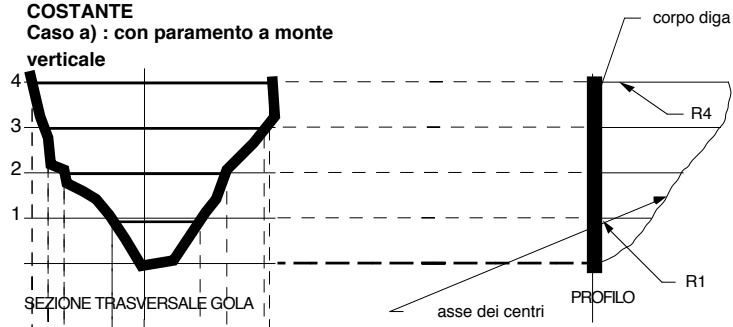
In quanto segue é l'esempio della definizione morfologia di dighe ad arco e nec caso si privilegi l'arco costante che il raggio costante.

Varie sono le ipotesi possibili nel caso di angolo al centro costante:

- con asse dei centri lungo la linea corrispondente ad un paramento a monte verticale (nel seguito rappresentato come caso a);
- con asse dei centri lungo una verticale e paramento a monte di conseguenza (nel seguito rappresentato come caso b);
- con asse dei centri lungo una opportuna linea regolare in modo da ottenere paramento a monte pressocché verticale ma con leggera concavità verso il basso (nel seguito rappresentato come caso c);

**DIGA AD ARCO AD ANGOLO AL CENTRO  
COSTANTE**

**Caso a) : con paramento a monte  
verticale**



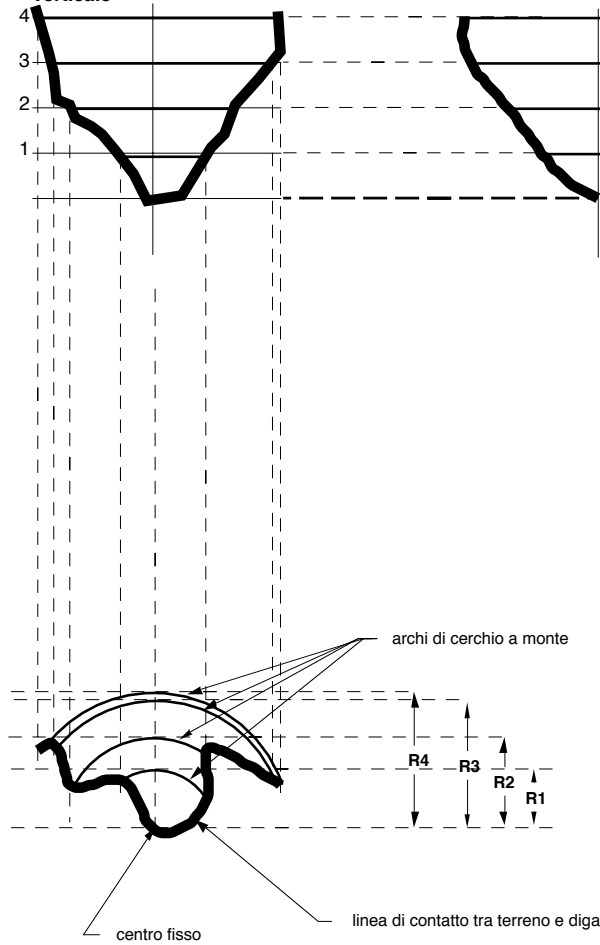
Esempi di dighe di questo tipo sono :

DIGA AD ARCO AD ANGOLO AL CENTRO

COSTANTE

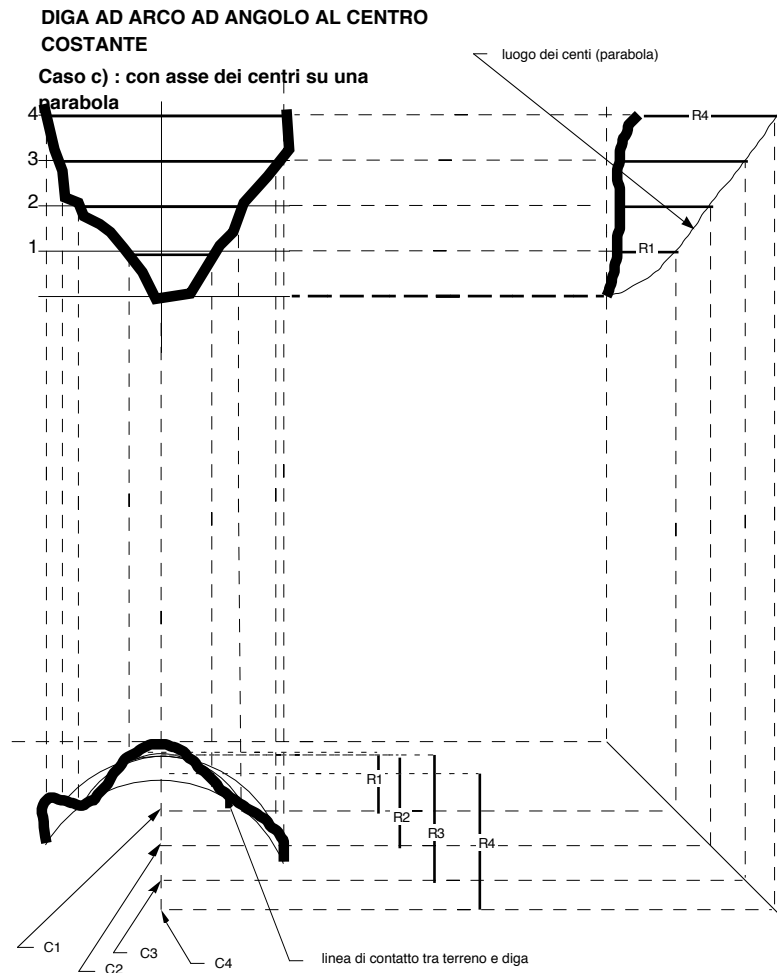
Caso b) : con asse dei centri

verticale



E' evidente che un tale definizione morfologica di diga non può avere applicazioni pratiche in quanto comporterebbe delle spinte verso l'alto del tutto assurde.

Più interessante é la morfologia illustrata nella figura che segue.



Vari sono gli esempi di dighe di tale tipo, ne citiamo alcuni:

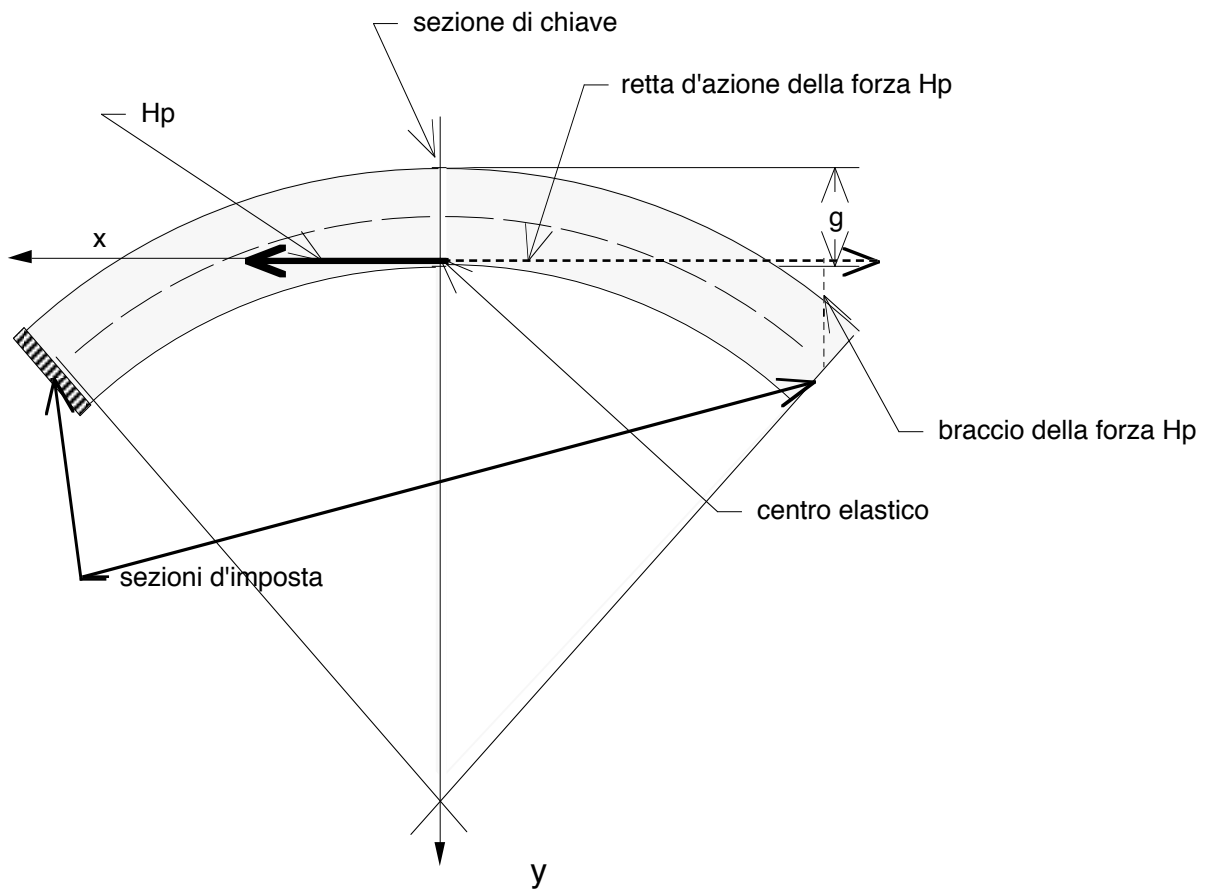
Per i relativi disegni si rimanda alla pregevole opera in 7 volumi dell' ANIDEL (Associazione delle imprese produttrici di energia elettrica<sup>17</sup>) "Le dighe di ritenta degli impianti idroelettrici italiani" del 1957 ed ai volumi di aggiornamento successivamente editi dalle ENEL.

<sup>17</sup> Sino al 1963 la produzione dell' Energia elettrica era un' attività gestita da imprese private, quali l' Edison, la Sade, l' Unes, la Sec, la Sme ecc..... L' Enel fu costituita nel 1963 con la nazionalizzazione della produzione di energia elettrica da uno dei primi governi di centro-sinistra (presidente Fanfani).

### 5.3.2.1 Ulteriori elementi sul predimensionamento delle dighe ad arco (teoria del Guidi)

In quanto sopra abbiamo posto che l'arco fosse rigido, in realtà l'arco è elastico.

Il Guidi ha proposto il seguente metodo che consiste nell'ipotizzare la struttura isostatica cioè costituita ancora da anelli indipendenti e con una delle sezioni d'imposta di ciascun arco, svincolata.



Arco completo svincolato all' estremità destra

La sezione d'imposta ora svincolata è soggetta ad una forza N ad essa normale che comporta uno spostamento della sezione stessa.

L'arco subisce quindi un'accorciamento  $\Delta L$  pari a<sup>18</sup>:

<sup>18</sup> Dalla formula di Mariotti abbiamo:

$$g = \frac{p d}{2 \sigma}$$



$$\Delta L = \frac{N L}{E A} \quad (10)$$

dove, ovviamente:

L = lunghezza dell' arco;

N = P R

P = pressione idrostatica sull' arco =  $\gamma_a h$

R = raggio dell' arco

E = modulo di elasticità del calcestruzzo;

A = area della sezione =  $s \cdot 1$

In effetti però la sezione considerata non è libera ma incastrata quindi nascerà una reazione capace di contrastare  $\Delta L$ .

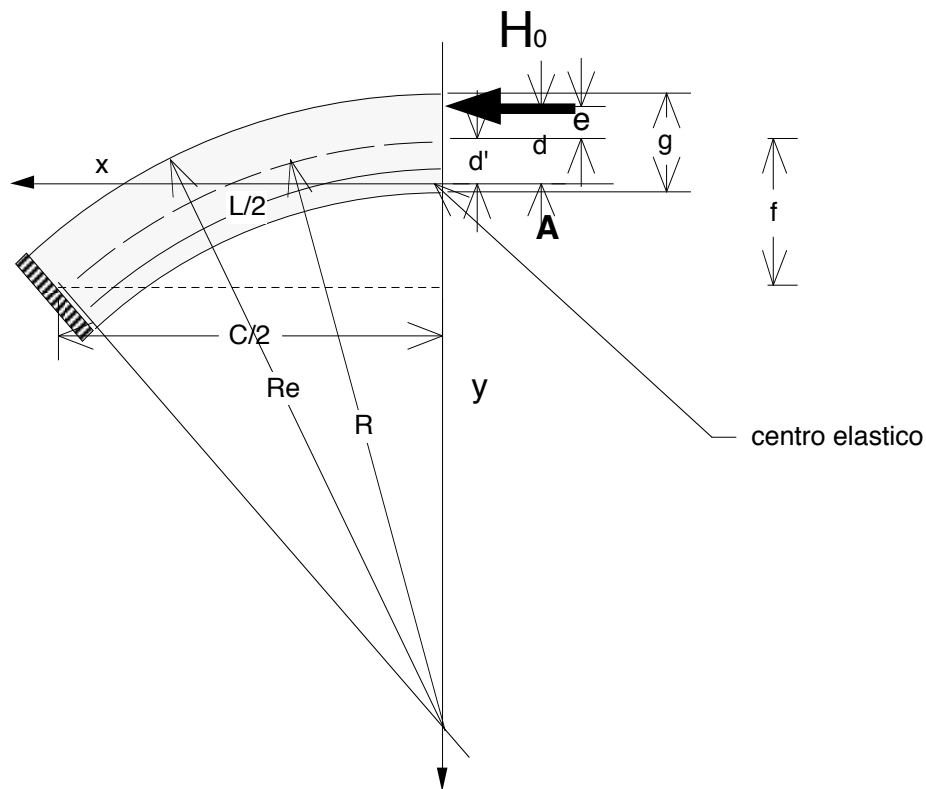
Dalla teoria dell'ellisse di elasticità deduciamo che questa reazione  $H_p$  deve agire sul baricentro del peso elastico della trave (in quanto la sezione d'imposta considerata svincolata deve soltanto traslare e non ruotare) ed avere direzione normale alla direzione coniugata a quella lungo la quale avviene lo spostamento.

Il baricentro del centro elastico coincide col baricentro geometrico della struttura.

---

da cui

$$N = g \sigma = p \frac{d}{2}$$



Quindi:

$$\Delta s = H_p J_x \quad (11)$$

da cui:

$$H_p = \frac{\Delta s}{J_x} \quad (12)$$

ma il valore di  $J_x$  è dato dalla:

$$J_x = \frac{6 \delta R^2 L}{E s^2} \quad (13)$$

dove  $\delta$  è funzione delle caratteristiche geometriche della struttura cioè:

- s spessore dell' anello;
- f freccia dell' arco;
- C corda dell' arco;

secondo la funzione seguente che trovasi tabulata sui testi specialistici (per esempio a pag. 373 del Ruggiero ed a pag. 241 del Contessini), ma che oggi può essere facilmente risolta con i mezzi di calcolo elettronici di cui si dispone, pertanto qui si fa a meno di riportarne il tabulato.

$$\delta = \frac{L}{C} + \frac{R-f}{R} - \frac{2C}{L} + \frac{g^2}{6R^2} \left( 2\frac{a}{C} - \frac{R-f}{R} \right) \quad (14)$$

Ne segue che:

$$H_p = \frac{pR}{6\delta} \left( \frac{g^2}{R^2} \right) \quad (15)$$

Noto il valore di  $H_p$ , è possibile calcolare le effettive tensioni presenti nella struttura ed in particolare nelle sezioni di chiave ed imposta che più ci interessano (essendo le più sollecitate perchè sono quelle più distanti dal punto cui è applicata l'azione  $H_p$ ).

La tensione generica è ovviamente calcolabile tramite la:

$$\sigma = \frac{H_p}{g} \pm \frac{H_p e}{W} \quad (16)$$

dove  $W$  è il modulo di resistenza, pari dunque per sezioni rettangolari di larghezza unitaria, a:

$$W = \frac{g^2}{6} \quad (17)$$

dunque la (16) diventa:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\frac{pR}{6\delta} \left( \frac{g^2}{R^2} \right)}{g} + 6 \frac{pR}{6\delta} \left( \frac{g^2}{R^2} \right) \frac{e}{g^2} = \\ &= \frac{p}{\delta} \left( \frac{g}{6R} + \frac{R}{R^2} e \right) \end{aligned}$$

Cioè la tensione all'estradosso è data da  $\frac{pr}{g}$  più la tensione dovuta al momento di trasporto dell'  $H_p$  applicata nel punto di nocciolo esterno.

La tensione nel paramento interno verrà:

$$\sigma_i = \frac{pr}{g} + \frac{6H_p z''}{g^2}$$

Lo stesso metodo si usa per calcolare le tensioni all'imposta.

Il problema è semplificato dai grafici che vi sono sul testo.

fig.

Detti grafici danno i valori di  $\sigma_e$  e di  $\sigma_i$  tramite le:

$$\sigma_e = \frac{p r}{g} \pm \mu_e) p$$

$$\sigma_i = \frac{p r}{g} \pm \mu_i) p$$

Il segno posto superiormente vale per la sezione di chiave quello inferiore per la sezione di imposta. Sul testo in funzione di  $r/g$  e dell'angolo  $2\varphi$  vi sono delle tabelle che ci permettono di calcolare i valori di  $\mu_e$ ;  $\mu_i$  (sezioni di chiave) e  $\mu_e$ ;  $\mu_i$  (imposta).

La teoria del Guidi è stata criticata perchè non tiene conto delle interazioni tra i vari anelli.

#### 5.3.2.2 Ulteriori elementi sul predimensionamento delle dighe ad arco (teoria del Ritter)

Un'altro metodo è quello del Ritter ma anche questo non risponde al vero. Tale metodo consiste nel trattare ciascuno elemento come una mensola.

Uno stesso punto può essere considerato come elemento e della mensola e dell'anello.

fig.

Evidentemente tale punto subisce uno spostamento per effetto della deformazione elastica. Detto spostamento deve essere lo stesso sia esso calcolato come nel caso di mensola che in quello di anello. L'eguaglianza delle suddette due espressioni dello spostamento ci permette di scrivere un sistema di equazioni in  $n$  incognite dove  $n$  è il numero di punti presi in considerazione.

Risolvendo il sistema potremo calcolarci le sollecitazioni che agiscono sulla nostra diga.

Affinando la ricerca ai modelli si è arrivati a questa conclusione: se le dighe non sono molto alte ed il materiale ha modulo di elasticità piuttosto elevato conviene considerare la diga come formata da tante travi incastrate al

piede ed appoggiate all'anello superiore. Viceversa per dighe molto alte ( $h > 35\div 40$  m.) e con moduli di elasticità non elevata è valida la teoria del Guidi.

## 6 Dighe ad arco-gravità

Sono dighe dove é associato l'effetto dell' arco con quello della gravità.

Quindi sono strutture con anelli non sottili e pertanto per le quali non é valida neppure in prima approssimazione la formula di Mariotte.

Si ricorre a tali strutture allorquando si può confidare su buone, ma non eccezionali caratteristiche delle pareti di imposta e quindi la spinta dell' acqua viene in parte fatta assorbire da tali pareti ed in parte contrastata dal peso proprio delle diga che le scarica sulla roccia di fondazione.

In quanto segue non ci addentriamo nel merito di queste strutture ma diamo solo un' idea del loro predimensionamento.

Questo si basa sulla teoria dei tubi spessi dovuta al Lamé.

Siano :

$R_e$  il raggio d'estradosso (cioé quello maggiore);

$R_i$  il raggio d'intradosso (cioé quello minore);

$R$  il raggio corrente;

segue, ovviamente che lo spessore  $s$  é dato dalla:

$$s = R_e - R_i$$

nonché:

$\sigma_R$  la tensione nel corpo diga su una areola unitaria normale alla direzione radiale;

$\sigma_\theta$  la tensione nel corpo diga su una areola unitaria normale alla direzione circonferenziale;

avremo dunque :

$$\sigma_R = - \frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \left( \frac{R_i}{R} \right)^2 \right)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \left( \frac{R_i}{R} \right)^2 \right)$$

In effetti queste possono servire solo per un predimensionamento ma lo status tensionale per quanto prima detto é estremamente più complesso avendo rilavanza non trascurabile anche le tensioni  $\sigma$  agenti sui piani orizzontali.

Ma in questa sede non si ritiene di dover approfondire l'argomento.

## 7 Dighe in materiale sciolto

Con tale termine si compendiano le dighe:

- in terra
- in muratura a secco
- in pietrame alla rinfusa (Rock-fill o scogliere)

Storicamente questo tipo di diga risale ai tempi più remoti.

Le dighe in materiali sciolti danno dei buoni risultati grazie:

- all'esuberanza dei materiali che al lungo tempo d'esecuzione.
- hanno un costo relativamente basso.

Sino a non molti anni fa si ricorreva a queste quando le caratteristiche del terreno di fondazione non erano compatibili con altri tipi di diga, oggi la scelta è spesso derivante anche da considerazioni di tipo ambientale.

In concetto ispiratore delle prime scelte cioè quello delle caratteristiche del terreno di fondazione vale ovviamente anche per le scelte di secondo livello, cioè tra dighe in terra e dighe in pietrame.

Infatti:

- se il terreno è costituito da materiali incoerenti si ricorre a dighe in terra,
- se il terreno è costituito da roccia frantumata o lesionata allora è consigliabile fare la diga soprastante in pietrame

Si tende ad omogeneizzare la diga con il suo piano di appoggio.

Condizione essenziale, imposta dal regolamento italiano, è che le opere di presa devono essere realizzate al di fuori del corpo della diga stessa e nello stesso tempo va curata la determinazione della massima piena perchè se avviene lo sfioramento della diga la sua stabilità è immediatamente compromessa.



## 7.1 Dighe in terra

### 7.1.1 Considerazioni geometriche

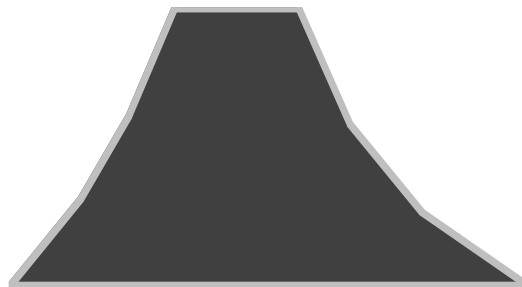
Il profilo della sezione maestra é in questo caso un trapezio od una successione di trapezi.

Infatti é possibile che i paramenti sia di monte che di valle abbiano, al variare delle altezze pendenze diverse

La tabella che segue indica le pendenze massime da assegnare ai paramenti sia a monte, sia a valle

altezza [m]	pendenza paramento (base/altezza)	
	a monte	a valle
<17	2,00	1,5
17÷25	2,5	2,00
>25	3,00	2,50

Infatti é opportuno che all'aumentare dell'altezza i parameti vadano sempre più schiacciandosi.



La larghezza minima da dare al coronamento (per h minore di 15 m.) è di metri 3;

Per altezze maggiori di 15 m. il coronamento non deve essere inferiore ad 1/5 dell'altezza.

Il franco minimo è di metri 1,5.

#### **7.1.2 Considerazioni costruttive**

Dal punto di vista costruttivo queste dighe possono essere realizzate con opportune combinazioni di : argilla, sabbia e ghiaia.

La resistenza meccanica è data dalla sabbia e dalla ghiaia, l'argilla ha la funzione di rendere impermeabile la diga stessa.

Qui non si vuole entrare in questioni di classificazione dei materiali geotecnici né nelle loro caratteristiche meccaniche e/o di permeabilità ed impermeabilità.

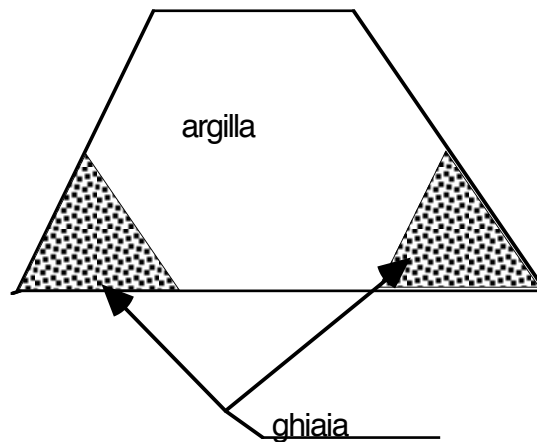
Ci si limita pertanto a dare solo un cenno sulle modalità costruttive che possono classificarsi come segue:

- a strati,
- col sistema idraulico,
- col sistema semidraulico;

In Italia si adopera solo il sistema a strati che consta nel sovrapporre strati di terra di 20÷30 cm. opportunamente compattati di volta in volta tramite cilindatura, eseguita con rulli compressori a dente di pecora.

In U.S.A. si sono usati anche sistemi idraulici.

Il sistema idraulico consiste nello iniettare nella cava di prelievo acqua ad alta pressione e nel convogliare la fanghiglia che così si forma sui paramenti interni ed esterni della diga.



Un inconveniente di questo sistema è che la pasta fluida che si raccoglie verso il centro può contenere un tenore notevole di acqua, allora la spinta che si esercita sui paramenti dovuta all'acqua contenuta in questa fanghiglia è pari alla pressione idraulica con peso specifico  $\gamma$  pari a quello del fango.

Oltre all'argilla sul nucleo centrale sono presenti lenti di sabbia quindi non si ottiene mai la perfetta impermeabilizzazione del nucleo stesso e quindi si hanno infiltrazioni di acqua.

Il sistema semidraulico consiste nel portare meccanicamente il terreno della cava nella sezione ove occorre fare la diga e quindi creare il suo posto di fanghiglia gettandovi sul materiale in pressione.

Il fenomeno è il medesimo che si verificava con il sistema idraulico: nucleo centrale di argilla e paramenti di sabbia e di ghiaia.

Lo stesso inconveniente che si verifica in questo caso inoltre l'argilla sarà presente pure sui paramenti esterni ciò comporta che l'acqua imprigionata al centro della diga non può uscirne.

Per tali motivi queste due tecniche non trovano applicazioni e sono scoraggiate dai regolamenti.

Qualsivoglia sia la metodologia costruttiva è necessario uno studio accurato della filtrazione nel corpo della diga.

Infatti poiché non si potrà mai ottenere la perfetta impermeabilizzazione del corpo diga è necessario progettare in modo tale che la linea di saturazione (o meglio la frontiera libera delle acque filtranti) cada sempre dentro la base.

Si possono realizzare dighe omogenee e dighe zonate.

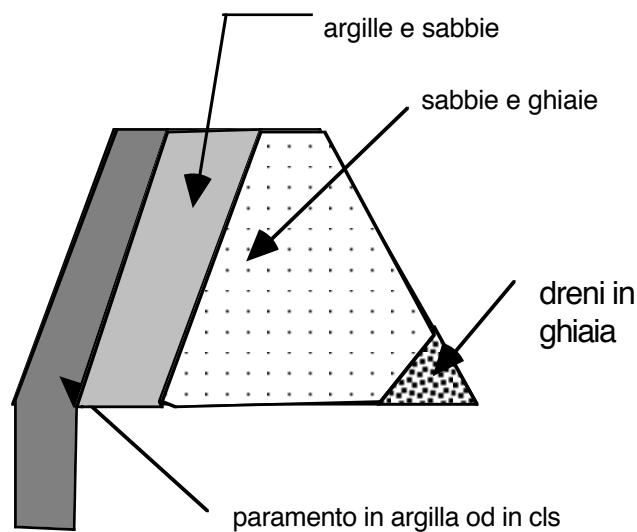
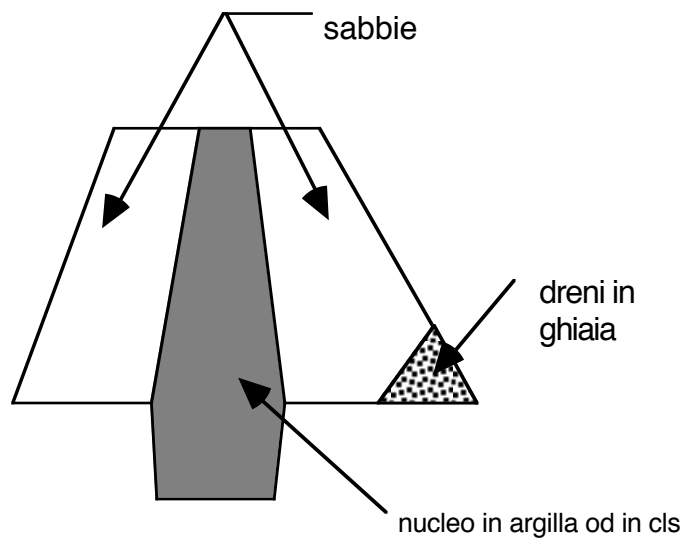
Le prime vengono realizzate con una opportuna miscela, ovviamente compattata di sabbie ghiaie ed argille.

Pertanto hanno permeabilità costante.

Le seconde i tre costituenti elementari sopra indicati ( in vero possono essere molti più di tre siua in funzione della granulometria che della natura stessa dei costutienti) hanno ciascuno una propria posizione.

Si possono realizzare dighe zonate con gli elementi impermeabili in centro al corpo diga (a nucleo impermeabile) od prossimità del paramento esterno.

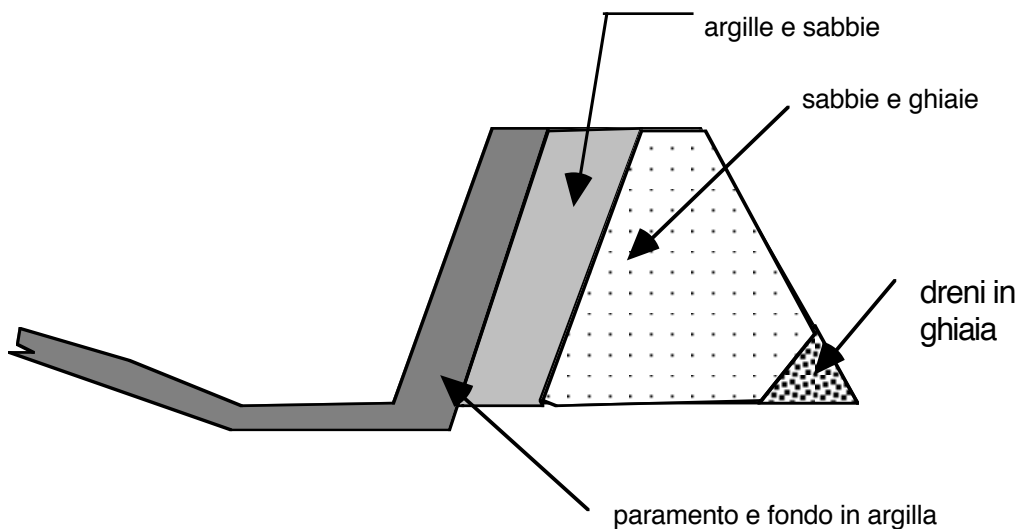
A volte il materiale impermeabile può essere costituito da un setto di calcestruzzo, ma é una soluzione estrema da adottarsi solo in assenza di idonei materiali naturali anche perché il contatto terreno calcestruzzo non da buoni risultati



Un'altro aspetto riguardante i problemi di filtrazione, oltre a quello del corpo diga, è quello inerente con contatto col terreno di fondazione

Schematizzando avremo i seguenti casi:

- 1) terreno di fondazione costituita da materiale alluvionale permeabile e di spessore inferiore ai 10÷15 m. e quindi sotto terreno impermeabile, in questo caso si porta il nucleo di argilla sino al terreno impermeabile (vedi figure precedenti);
- 2) Il terreno di fondazione è già impermeabile, nel qual caso basta fare di argilla solo il nucleo della diga, dobbiamo però dare alle acque piovane che cadono sul paramento a valle il modo di defluire, per questo motivo si fa un filtro alla rovescia, cioè un filtro di materiale di vario diametro disposti con pezzatura crescente dall'interno verso l'esterno.
- 3) Se lo strato permeabile supera i 15 m. a meno di opere estremamente costose non conviene prolungare verso il basso il nucleo od il paramento impermeabile e si ricorre allo schema riportato nella figura. che segue



e che consiste nel costruire un materasso in argilla dello spessore di 1,5÷3,0 m e di una lunghezza verso monte maggiore di 10 volte l'altezza della diga; anche in questo caso a valle bisogna fare un filtro.

## 7.2 Verifica di stabilità delle dighe in terra

La verifica di stabilità delle dighe in terra si attua sulla base delle stesse teorie usualmente utilizzate per la verifica di stabilità delle scarpate ed in particolare delle scarpate artificiali.

Quindi ipotizzando una serie di possibili superfici (in genere cilindriche) di scorrimento e valutando l'equilibrio alla scivolamento della parte superiore su quelle inferiori, supposta stabile.

La verifica può essere effettuata con vari metodi alcuni dei quali sono qui citati a titolo esemplificativo: Bishop, Fellenius, Taylor, Morgenstern-Price ecc...

Come è noto ciascuno di questi metodi apporta al sistema della azioni in gioco delle semplificazioni.

Ovviamente a ciascuna superficie di scorrimento corrisponderà un coefficiente di sicurezza. Di questi vanno presi in considerazione, per ciascuna superficie e per ciascuna ipotesi di carico (diga piena, diga vuota, svuotamento veloce ecc....) solo i valori minori.

Particolari calcoli vanno poi condotti nel caso di dighe in località soggette sollecitazioni sismiche.

## 7.3 Dighe in pietrame

Possono essere come già visto:

- a scogliera ( Rock-fill )

o

- a secco.

Il primo tipo, un tempo vietato in Italia ma poi riamesso dal regolamento del 1982 è costituito da materiale di varia pezzatura gettato alla rinfusa;

Il secondo, a secco è costituito con con materiale appositamente squadrato, posto in sito con cura in modo da rendere minimi gli interspazi.

Comunque è importante, nelle dighe in pietrame, ridurre al minimo i vuoti.

Anche in questo caso occorre risolvere il problema della impermeabilizzazione.

Di norma il corpo della diga a secco è costituito da tre parti:

- una parte centrale, che è la parte resistente, costituita da pietre squadrate e sistemate,

- una parte intermedia, semi-elastica, costituita da calcestruzzo magro,
- una parte esterna avente la funzione di rendere la struttura perfettamente impermeabile.

La parte intermedia ha proprio la funzione di impedire che eventuali cedimenti del corpo della diga vengano ad essere risentiti dall'elemento impermeabilizzante e nello stesso tempo ha la funzione di trasmettere, nel modo più uniforme possibile, la pressione dall'elemento impermeabilizzante alla parte muraria resistente.

Sull'elemento esterno, per rendere impermeabile la parete si può ricorrere a vari sistemi:

- soletta in cemento armato;
  - rivestimento in legame (che è consigliabile solo nella parte inferiore);
  - lastre metalliche (USA);
- lamiere in plastica (polietilene); resistenza alla trazione di 20 Kg/cm<sup>2</sup> ed allungamento percentuale del 300%.

In Italia l'elemento che più si usa è la soletta in cemento armato; essa si fa spesso di spessore costante pari a 30÷35 cm. e l'armatura consiste in due setie di reti metalliche (armatura a piastra).

Se l'altezza della diga è notevole la soletta può avere spessore variabile; le due reti metalliche sono una sull'estadosso l'altra sull'introdosso la percentuale di ferro è del 60÷70%; agli altri tipi di impermeabilizzazione si ricorre solo in casi eccezionali.

E' necessario creare sotto la diga un taglio sino a raggiungere il terreno impermeabile.

Le parti impermeabilizzanti hanno bisogno di giunti di dilatazione, perciò vengono costruiti a riquadri, che poi vengono saltati tra loro tramite giunti bituminosi o di rame;

Si cerca di eliminare le infiltrazioni di acqua piovana sul paramento a valle e questo si ottiene chiudendo con malta di cemento tutte le fessure presenti sul paramento stesso

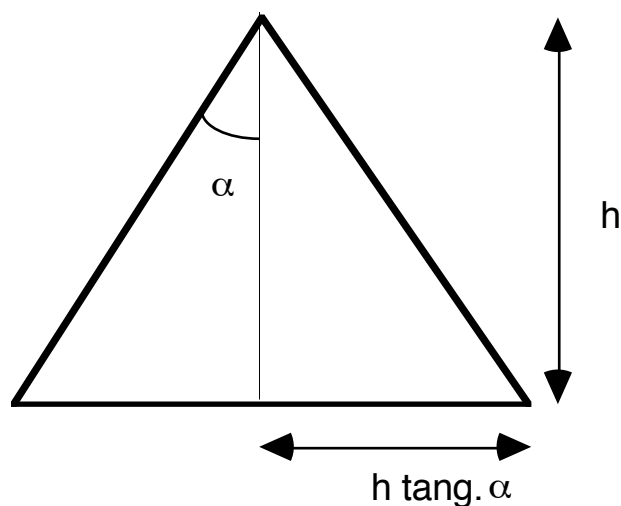
#### 7.4 Elementi per la verifica statica delle dighe in pietrame

Dal punto di vista statico non si possono applicare i metodi della Scienza delle Costruzioni, d'altronde:

- il solido non è certo il solido elastico della Scienza delle Costruzioni;
- le dimensioni del corpo diga comunque, sia in condizioni di serbatoio vuoto che in quelle di serbatoio pieno è sempre verificata la condizione che il centro di sollecitazione, visto sulla sezione maestra sia prossimo al baricentro in modo che il piano di appoggio sia sollecitato con pressione uniforme, quindi anche l'assestamento della struttura sarà uniforme.

##### 7.4.1 Elementi di predimensionamento

In prima approssimazione, tuttavia, proprio per rispettare la condizione appena sopra menzionata si impone alla diga una sezione triangolare isoscele, dobbiamo ricavare il valore di  $\alpha$  in modo che a serbatoio pieno la risultante cada dentro il baricentro.



La condizione di cui sopra (centro di sollecitazione alla base per il baricentro geometrico della base) equivale a che il momento della spinta dell'acqua rispetto al baricentro sia nullo (il peso, essendo la diga simmetrica, passa per il baricentro).



Quindi, tenuto conto che le due componenti (orizzontale e verticale) della spinta sono:

$$S_0 = \frac{1}{2} \gamma_a h^2$$

$$S_v = \frac{1}{2} \gamma_a \operatorname{tg} \alpha$$

affinché il momento risultante rispetto al baricentro sia nullo e tenuto conto che quello derivante dal peso della diga è di per se nullo) ne segue che i momenti dovuti  $S_0$  e  $S_v$  a devono essere eguali in modulo ed opposti, segue che, essendo :

$$M_0 = \frac{1}{6} \gamma_a h^3$$

$$M_v = \frac{1}{3} \gamma_a h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

da cui:

$$\frac{1}{6} \gamma_a h^3 = \frac{1}{3} \gamma_a h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

e semplificando:

$$0,5 = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

ergo:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,707$$

cioè

$$\alpha = 35^\circ$$

Il profilo reale sarà a sezione sarà trapezia con un franco, minimo di un metro, ed in ogni caso sempre maggiore della semi altezza dell'onda.

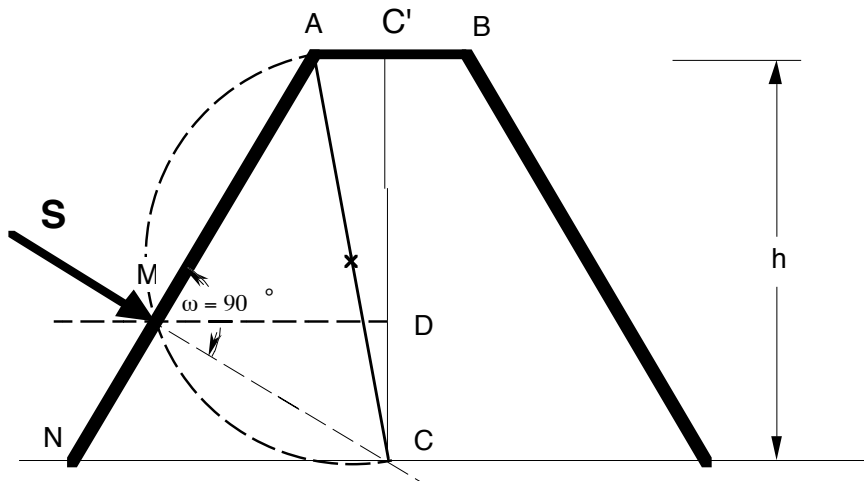
La larghezza del coronamento deve essere almeno pari ad 1/6 dell'altezza h ed in ogni caso mai inferiore a 2,5 m.

Per motivi storici accenniamo ad un procedimento grafico che permette la costruzione della sezione maestra della diga (cioè l'inclinazione dei paramenti ).

Sia:

h l'altezza della diga, franco compreso;

AB = larghezza del coronamento 1/6 h



Si congiunga A con C;

- si tracci un semicerchio di diametro pari ad AC;
- dal punto D, tale che  $DC = h/3$ , si tracci un'orizzontale sino ad incontrare il semicerchio nel punto M;
- si congiunga A con M e si prolunghi tale segmento sino al punto N,

N é un punto del paramento della diga e pertanto il suo profilo dovrà passare da A ad M sino ad N avremo così il profilo della diga

Infatti tracciando da M la congiungente con C questa sarà le retta di azione della spinta S:

- il punto M trovasi ad  $1/3$  dalla base;
- la retta CM é ortogonale al paramento NA in quanto l'angolo  $\omega$  é angolo alla circonferenza cui risponde un angolo al centro piatto

Un'altra verifica che occorre fare è quella allo scorrimento per la quale si assume un coefficiente di attrito non superiore a 0,3. Le modalità di verifica allo scorrimento sono ovvie.

Ovviamente in questo caso non si considera la sottopressione perchè essendo la diga permeabile, tali fenomeni non si generano.

Imponendo le due condizioni ( $\alpha = 35^\circ$ ;  $f = 0,30$ ) si ricavare il valore ottimale di  $\gamma_m$  cioè del peso di volume che risulta essere pari ad  $1,286 \text{ [t/m}^3\text{]}$ .

Adottando del materiale con peso specifico di  $2,5 \text{ [t/m}^3\text{]}$  si potrebbe al più realizzare una struttura col 25% di vuoti.

#### **7.4.2 Verifiche di stabilità**

## **8 Le traverse**

Si intendono con traverse delle strutture trasversali ai corsi d'acqua che non hanno lo scopo di creare un invaso (se non che modesto e dovuto a fenomeni inbdotti: rigurgito) bensì quello di realizzare un "tirante d'acqua" cioè una determinata altezza minima nel corso d'acqua atta a realizzare le condizioni per poter deviare l'acqua in in canale laterale o frontale o comunque per realizzare un "salto" tra i peli liberi di monte e di valle.

Si dividono in traverse fisse e mobili.

## **9 Cenni sugli organi di presa e di intercettazione e gli organi di scarico**

### **9.1 Gli organi di presa e di intercettazione**

Durante il funzionamento normale del nostro impianto gli scarichi sono chiusi con una paratoia in genere piana, queste paratoie sono soggette a forti pressioni idrostatiche quindi il loro sollevamento richiede un notevole sforzo di trazione necessario per vincere le forze d'attrito provocate dalla pressione.

fig.

Si adopera quindi il seguente sistema: paratoia piana prima e paratoia a settore dopo; nella paratoia piana si pratica un piccolo foro munito di una propria paratoia (By pass). Essendo molto piccola l'area della paratoia di ale foro su di essa agirà una spinta idrostatica piccola per cui questa paratoia potrà essere sollevata facilmente; l'acqua da questo foro entrerà nella galleria, avremo quindi l'eguaglianza tra le pressioni sulle due fasce della paratoia piana, cosa che ci permette il sollevamento della paratoia stessa con una forza piccolissima esattamente eguale al peso della paratoia stessa. Resta da aprire la paratoia a settore. La spinta che l'acqua esercita su questa paratoia a settore passa per la sua cerniera quindi non dà momento, perciò basterà applicare l'azione necessaria per vincere il solo peso della paratoia stessa.

### **9.2 Gli organi di scarico**

Gli scarichi di una diga si distinguono in:

- scarichi di fondo;
- scarichi di mezzofondo
- scarichi di superficie

Oltre a differire per la posizione altimetrica e conseguentemente per forma, differiscono anche per funzione.

Gli scarichi di fondo servono a svuotare in toto il lago artificiale, di norma trattasi della stessa opera utilizzata inizialmente per la deviazione provvisoria delle acque dal greto del corso d'acqua in modo da consentire la realizzazione della diga.

Solo raramente vengono utilizzati per manovre gestionali.

In teoria potrebbero servire da sghiaiatori, ma un tale uso é rischioso, infatti ghiaia e materiale solido vario che potrebbe fermarsi nella sede delle paratoie potrebbe comprometterne la chiusura.

Gli scarichi di mezzo-fondo servono per gestire il livello del lago nel caso che per qualsivoglia motivo sia opportuno diminuirne l'invaso.

Una tale evenienza si potrebbe ad esempio verificare in rispondenza di eventi bellici, per diminuire i rischi per la zona a valle nel caso di bombardamento della diga ed ogni qual volta si possa temere un qualche evento calamitoso, tuttavia non certo o prossimo, le cui conseguenze possano essere evitate o ridotte sensibilmente abbassando il livello del lago senza compromettere in toto la sua funzione.

Gli scarichi di superficie hanno invece lo scopo di smaltire le acque in esubero e quindi anche quello di scaricare a valle quella parte delle portate (di piena) fluviali in arrivo che non possono essere invasate.

Essi quindi vanno dimensionati sulla base delle portate di massima piena.

#### **9.2.1        Gli scarichi di fondo e di mezzofondo (scarichi sotto battente)**

La descrizione ed il funzionamento di tali tipi di scarico é analoga a quella vista per le prese in pressione alle quali si rimanda.

Il dimensionamento va fatto applicando l'equazione della foronomia a livello variabile.

Fissato un tempo  $t$  per abbassare il livello e si calcola la bocca di scarico necessaria a smaltire il volume invasato nel tempo prefissato.

#### **9.2.2        Gli scarichi di superficie**

Un primo distinguo é sulla ubicazione planimetrica degli scarichi., infatti avremo:

- scarichi laterali;
- scarichi frontali
- altri scarichi

Un secondo distinguo é quello circa il funzionamento degli scarichi. Infatti potremo avere indipendentemente dall' ubicazione planimetrica:

scarichi fissi                    nei quali l'acqua raggiunta la soglia sfiorante automaticamente viene scaricata;

oppure

scarichi mobili            nei quali l'acqua supera la soglia sfiorante (quindi si aumenta la capacità d'invaso nel lago) e solo dopo aver raggiunto un prefissato livello, in automatico, si apre la paratoia (che altro non è che una piccola diga mobile) e l'acqua sopra la soglia di imposta della detta diga mobile viene scaricata. Diga mobile che poi con l'abbassare del livello dell' acqua si richiude in automatico.

Non di rado l' evacuazione della portata di massima piena (eccezionale) viene raggiunto accoppiando uno scarico di superficie:

mobile                      che smaltisce le portate entro un certo limite, permettendo un considerevole aumento dell' altezza e del volume utile

ed

fisso                        che smaltisce le portate oltre il limite suddetto ed entrando in funzione solo in casi eccezionali. In tal caso la soglia sfiorante di quest'ultimo è al di sopra del livello di intervento delle paratoie dello scarico mobile.

Un esempio di tale suddivisione di compiti è dato dalla diga di Talvacchia sul Castellano (affluente di destra del Tronto in Ascoli), dove le piene ordinarie sono smaltite da 4 paratoie laterali a ventola in sinistra idrografica e la massima piena eccezionale da un enorme sfioratore fisso, frontale, in corpo diga.

Comunque qualsivoglia sia il tipo di diga gli scarichi, in specie quelli di piena, devono essere tali che la struttura non venga trascinata. pertanto si avranno quindi in generale scarichi laterali, rettilinei od su spezzate (a zig-zag), quest'ultima soluzione permette di ottenere una soglia sfiorante maggiore.

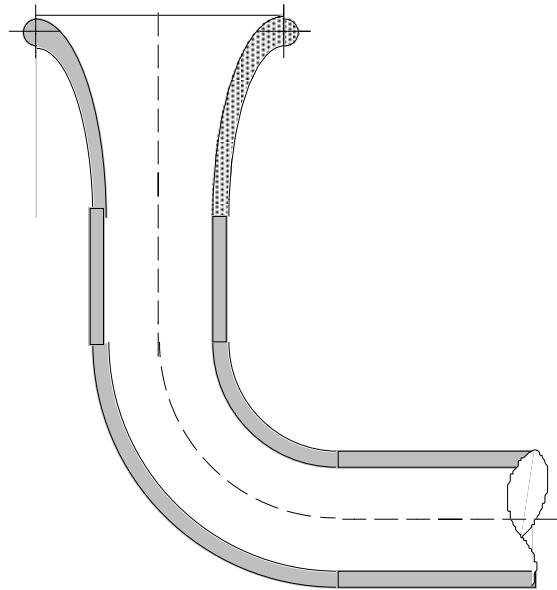
Per tale motivo gli scarichi di superficie il più delle volte sono al di fuori del corpo della diga ma quando le caratteristiche geologiche della zona non lo permettono allora si ricorre a soluzioni alternative che prevedono una sorta di trascinamento controllato del corpo diga.

In questi casi gli scarichi sono frontali.

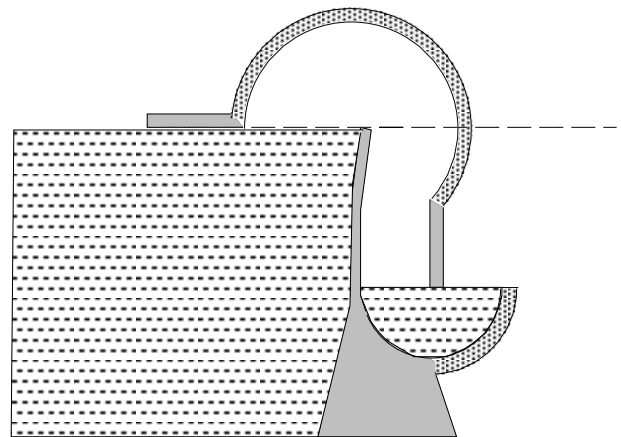
Oltre agli scarichi sopra visti si possono avere gli sfioratori a calice.

Questi sono costituiti da uno o più calici di calcestruzzo localizzati dentro il bacino idrico, in tali casi la soglia sfiorante è tutta la circonferenza

Lo studio idraulico è piuttosto complesso e spesso per la determinazione della portata sfiorante è necessario approntare un apposito modello fisico



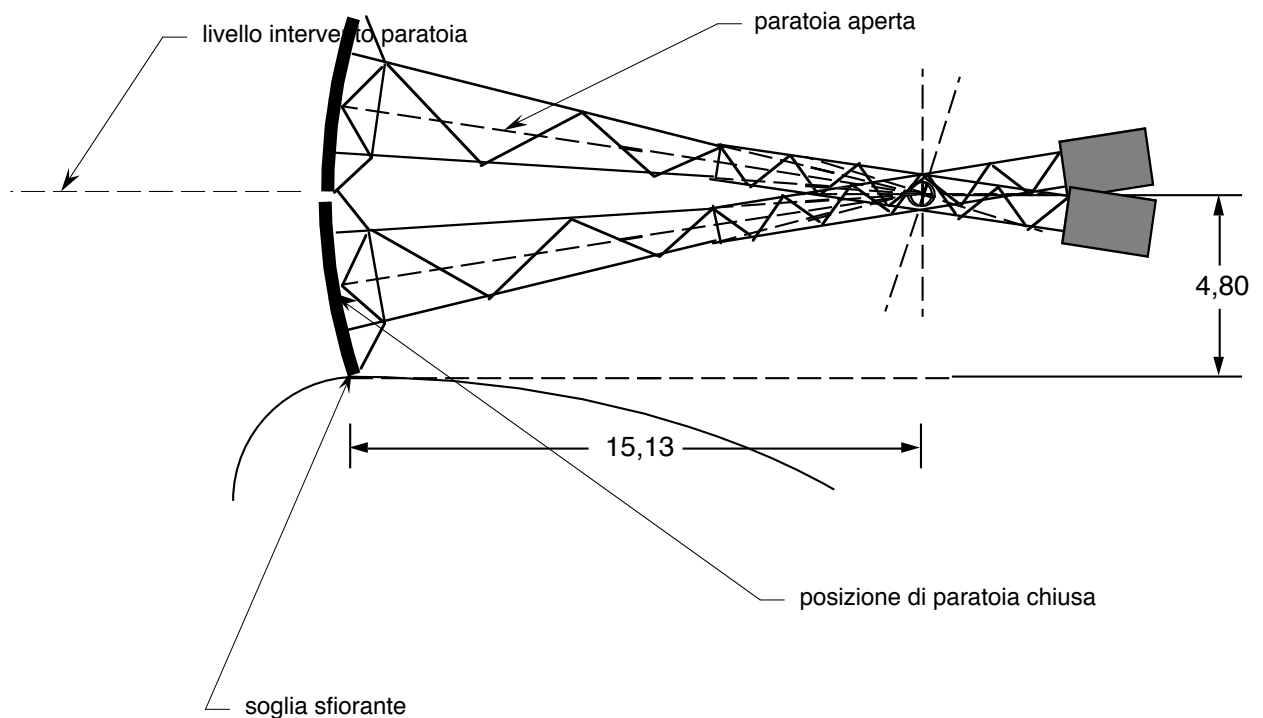
Vi sono anche sfioratori autoadescanti, l'area presente nella parte superiore del sifone viene espulsa dall'acqua che la trascina con sé, non può essere adottato nelle zone a gelo.



Qui di seguito sono delle schematiche illustrazioni di possibili scaricatori mobili di tipo automatico.

Il primo di essi è una paratoia a settore (circolare) che di norma è azionata da un sistema di cassoni galleggianti, posti nelle pile a lato della paratoia stessa ed azionati dal livello del lago.





Tale sistema consta dunque di due cavità poste nelle pile a latere della paratoia. Entro ciascuna di tali cavità è alloggiato un cassone galleggiante (in genere un parallelepipedo cavo metallico e controventato all'interno che sarà sottoposto alla spinta archimedeica.

L'acqua entra nella cavità della pila da apposite finestre aperte sull' lago ad opportuna altezza, munite di griglia e solleva il cassone.

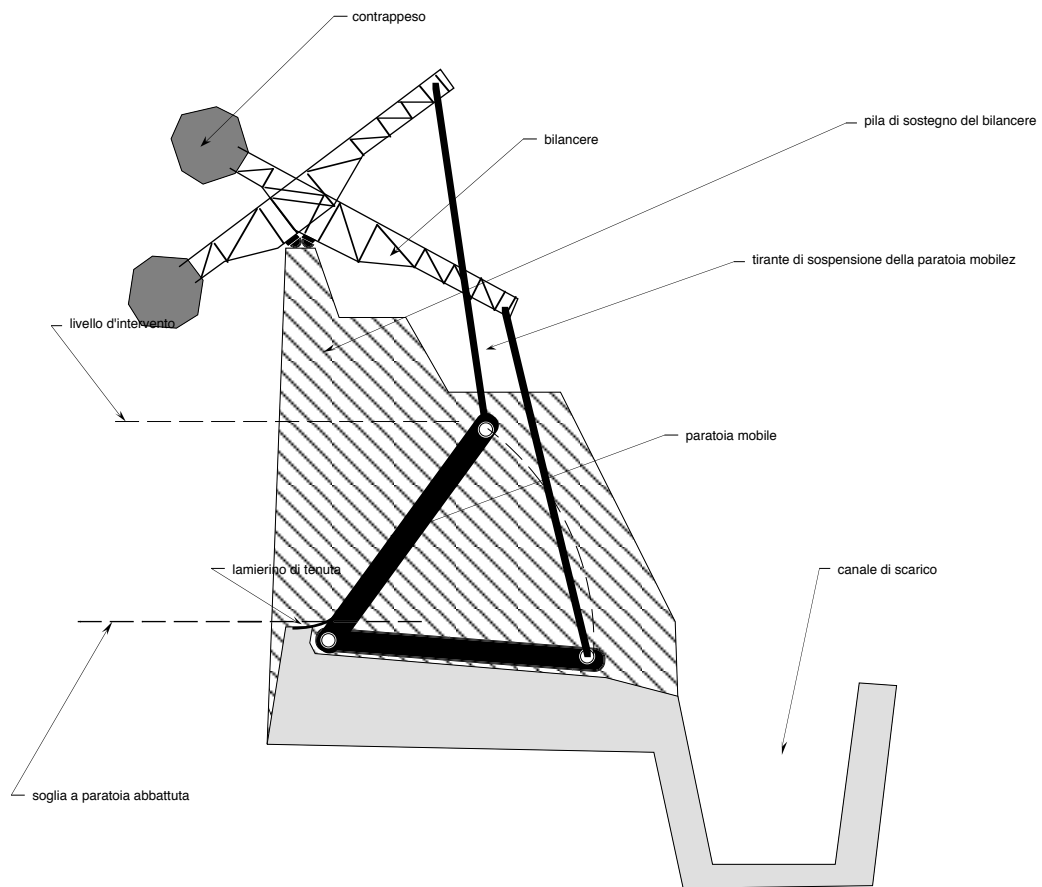
Tramite manovellismi e/o pulegie e catene il movimento di sollevamento del cassone viene trasmesso alla paratoia.

La figura seguente è invece relativa a paratoie a ventola.

L'acqua preme contro la paratoia ma sin tanto che il suo livello è inferiore a quello d'intervento il contrappeso tiene la paratoia sollevata.

Poi con il superamento del detto livello, anche di pochissimi millimetri, la paratoia si inclina sempre più sino all'eventuale suo completo abbattimento.

Ovviamente con diminuire del livello dell'acqua in contrappeso riprende il sopravvento e riporta la paratoia nella posizione di chiusura.



*APPENDICE 1 D.M. 24/3/1982 - Norme tecniche per la  
progettazione e la costruzione delle dighe di sbarramento*

CARATTERISTICHE GENERALI STRUTTURALI E  
COSTRUTTIVE VERIFICHE DI SICUREZZA

A CLASSIFICAZIONE E DEFINIZIONI.

*A1 Classificazione*

Agli effetti delle norme che seguono gli sbarramenti sono classificati nei tipi seguenti:

A) Dighe murarie:

a) a gravità;

- 1) ordinarie;
- 2) a speroni, a vani interni;

b) a volta;

- 1) ad arco;
- 2) ad arco - gravità;
- 3) a cupola;

c) a volte o solette, sostenute da contrafforti.

B) Dighe di materiali sciolti;

- a) di terra omogenee;
- b) di terra e/o pietrame, zonate, con nucleo di terra per la tenuta;
- c) di terra permeabile o pietrame, con manto o diaframma di tenuta di materiali artificiali;

C) Sbarramenti di tipo vario;

D) Traverse fluviali.

## A.2 Definizioni.

*Altezza della diga:* è il dislivello tra la quota del piano di coronamento (esclusi parapetti ed eventuali muri frangionde) e quella del punto più basso della superficie di fondazione (escluse eventuali sottostrutture di tenuta).

*Quota di massimo invaso:* è la quota massima a cui può giungere il livello dell'acqua dell'invaso ove si verifichi il più gravoso evento di piena previsto, escluso la sopraelevazione da moto ondoso.

*Quota massima di regolazione:* è la quota del livello d'acqua al quale ha inizio, automaticamente, lo sfioro dagli appositi dispositivi.

*Altezza di massima ritenuta:* è il dislivello tra la quota di massimo invaso e quella del punto più depresso dell'alveo naturale in corrispondenza del paramento di monte.

*Franco:* è il dislivello tra la quota del piano di coronamento e quella di massimo invaso.

*Franco netto:* è il dislivello tra la quota del piano di coronamento e quella di massimo invaso aggiunta a questa la semiampiezza della massima onda prevedibile nel serbatoio.

*Volume totale di invaso:* è la capacità del serbatoio compresa tra la quota di massimo invaso e la quota minima di fondazione; per le traverse fluviali è il volume compreso tra il profilo di rigurgito più elevato indotto dalla traversa ed il profilo di magra del corso d'acqua sbarrato.

*Volume utile di regolazione:* è il volume compreso fra la quota massima di regolazione e la quota minima del livello d'acqua alla quale può essere derivata, per la utilizzazione prevista, l'acqua invasata.

*Volume di laminazione:* è il volume compreso fra la quota di massimo invaso e la quota massima di regolazione, ovvero, per i serbatoi specifici per laminazione delle piene, tra la quota di massimo invaso e la quota della soglia inferiore dei dispositivi di scarico.

## B NORME GENERALI.

### B1 Ampiezza massima delle onde nel serbatoio.

Al fine della determinazione del franco netto in cui in A2. possono essere assunti in mancanza di più precise indagini, i valori seguenti delle ampiezze massime delle onde nel serbatoio, in m, inteso con  $F$  la lunghezza massima del fetch, in km, a fronte della diga e con  $V$  la massima delle velocità medie del vento, in km per ora.

	F= Km/h	1	2	4	6	8	10	15
V =	100	1,09	1.51	2.09	2.52	2,89	3.21	3,88
V =	80	0.86	1.19	1.65	1.99	2,28	2,53	3,07
V =	≤60	0.63	0,88	1,21	1.47	1.68	1.87	2,26

Per i valori di  $F$  e  $V$  intermedi fra i precedenti le ampiezze predette sono determinabili per interpolazione.

In sede di progetto esecutivo saranno individuati i dettagli litostratigrafici; e strutturali delle formazioni presenti nel corpo di fondazione; ove la zona di imposta interessi più di una unità litostratigrafica, le indagini riguarderanno tutte le unità litostratigrafiche interessate ed il tipo di contatto tra esse.

Saranno inoltre determinate le proprietà meccaniche, con particolare riguardo alla resistenza e deformabilità, e la permeabilità dei terreni, sia sciolti che lapidei, almeno fino alla profondità a cui potrà risultare apprezzabile l'influenza dei carichi esercitati dallo sbarramento e delle azioni esercitate dall'acqua del serbatoio; saranno inoltre determinate le caratteristiche della circolazione idrica sotterranea.

L' area oggetto delle suddette indagini verrà estesa convenientemente a monte, a valle e, nei riguardi della stabilità dei versanti, al disopra delle imposte della diga e relative opere ausiliarie.

Le caratteristiche di cui sopra sono da determinare con analisi, nuove, accertamenti di laboratorio ed in sito. In ogni caso le indagini in sito e quelle di laboratorio dovranno opportunamente integrarsi ed i loro risultati, riassunti ed analizzati in apposita relazione, dovranno essere correlati tra loro.

La documentazione delle indagini geognostiche in sito risultati dei sondaggi, cunicoli, trincee, pozzi e dispositivi di osservazione dovrà essere completa in ogni sua parte e firmata dall'estensore della relazione stessa.

Nel caso in cui siano previsti trattamenti o interventi particolari per sopperire a difetti locali ovvero per migliorare le caratteristiche generali dei terreni e, in particolare, per ridurre la permeabilità, dovranno essere svolte prove in sito allo scopo di verificare la possibilità di esecuzione dei trattamenti stessi e la loro efficacia.

Durante gli scavi che precedono la costruzione della diga verrà eseguito l' accertamento continuo relativamente alla rispondenza delle caratteristiche della roccia alle previsioni del progetto esecutivo.

Per le opere da costruire in aree che non appartengono alle zone comprese negli elenchi di cui all'art. 3, secondo comma, punti a) e c) della legge 2 febbraio

1974, n. 64<sup>19</sup>. dovrà essere condotto uno studio geotettonico e macrosismico ai fini dell'eventuale equiparazione a zone classificate e quindi all'applicazione delle norme relative.

Nelle zone da ritenere soggette a sismi, è da escludere la costruzione di dighe murarie se la fondazione non ha caratteristiche meccaniche notevolmente uniformi e se le discontinuità strutturali hanno origine da faglie in presumibile stato di attività.

E ancora da escludere, nelle zone predette, la eseguibilità di opere anche di materiali sciolti se nelle fondazioni sono presenti sabbie fluidificabili o argille sensibili. La presenza di terreni altamente costipabili richiede la valutazione degli effetti, in caso di sisma, sulla struttura.

E in ogni caso da escludere l'eseguibilità di dighe di qualsiasi tipo se sulle spalle della sezione di sbarramento, anche al disopra del livello massimo di invaso, esistono condizioni di prevedibile pericolo di frane in condizioni normali o in conseguenza di sismi.

### *B3 Verifiche di sicurezza.*

Le verifiche di sicurezza dovranno essere eseguite in ordine alle azioni di peso proprio della struttura e di spinta dell'acqua per livello del serbatoio alla quota di massimo invaso, nonché di sottopressioni, di coazioni termiche e da ritiro quali in seguito specificate per le diverse specie di strutture. Le verifiche stesse sono da estendere di norma alla fondazione, tenuto conto dei provvedimenti eventualmente previsti per migliorarne le caratteristiche meccaniche e di tenuta.

### *B4. Azioni sismiche.*

Nelle verifiche di sicurezza delle dighe da costruire nelle zone dichiarate sismiche ai sensi del secondo comma dell'articolo 3 della legge 2 febbraio 1974, n. 64. ad in quelle ad esse assimilate a norma dell'ottavo comma dell'art. B - 2 delle presenti norme, le azioni inerziali della massa strutturale e dell'acqua verranno assunte con le regole seguenti salvo quant'altro specificato ai punti C-4 b) e H-6.

#### *a. Azioni inerziali della massa strutturale*

Le azioni inerziali della massa strutturale sono costituite convenzionalmente dalla seguenti forze unitarie di volume:

- 1) orizzontali, parallele al piano della sezione maestra della diga, di valore

$$F_h = C W \quad (i)$$

dove :

---

<sup>19</sup> Trattasi della legge inerente le costruzioni in zona sismica

$$C = \frac{S-2}{100} \quad (\text{ii})$$

è il coefficiente di intensità sismica;

S è il grado di sismicità ( $S \geq 2$ ) come definito nel decreto ministeriale 3 marzo 1975 relativo alle Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche;

W è il peso unitario di volume del materiale;

2) orizzontali, di intensità uguale alle precedenti, ma ad esse perpendicolari;

3) verticali, di intensità.

$$F_v = m C W \quad (\text{iii})$$

dove il coefficiente m è da assumere non inferiore a 0,5.

*b. Azioni inerziali dell'acqua invasata*

Le azioni di inerzia dell'acqua, i cui effetti sono da aggiungere a quelli di inerzia della massa muraria, saranno assimilate ad una distribuzione continua di pressione normali al paramento di monte di intensità.

$$p = C \gamma_a c y_a \quad (\text{iv})$$

dove:

C è il coefficiente di intensità sismica nella misura prevista dalle norme sopra citate;

$\gamma_a$  il peso per unità di volume dell'acqua;

$y_a$  la differenza fra la quota massima di invaso come in appresso specificata e la quota del punto più depresso dell'alveo naturale in corrispondenza del paramento di monte della struttura;

c è la funzione:

$$c = \frac{c_m}{2} \left| \frac{y}{y_0} \left( 2 - \frac{y}{y_0} \right) + \sqrt{\frac{y}{y_0} \left( 2 - \frac{y}{y_0} \right)} \right| \quad (\text{v})$$

in cui:

y è la differenza fra la quota massima di invaso e la quota del punto generico del paramento a cui è associata la pressione p sopra indicata

ed

$c_m$  è un coefficiente dipendente dall'angolo  $\alpha$  di inclinazione del paramento rispetto alla verticale, a cui sono da attribuire i seguenti valori (da interpolare per valori dell'angolo non compresi nella tabella):

$\alpha=0$	$5^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$ ed oltre
$c_m=0,74$	0,70	0,67	0,60	0,45	0,30

Se il paramento di monte ha inclinazione non costante è da assumere per  $c_m$  il valore medio pesato in base all'estensione dei singoli tratti di diversa inclinazione. Tra i valori sopra indicati con riferimento alla sezione maestra; per le eventuali zone con inclinazione negativa, a strapiombo verrà assunto per  $c_m$  il valore 0,74.

c) *Quota massima di invaso da considerare*

Agli effetti delle verifiche relative alle azioni ordinarie e sismiche concomitanti si intende per quota massima di invaso:

- 1) se gli sfioratori superficiali sono in tutto muniti di paratoie, qualunque sia il loro tipo la quota di massimo invaso;
- 2) se gli sfioratori superficiali sono in parte a soglia libera ed in parte muniti di paratoie, la quota che verrebbe raggiunta dal livello dell'acqua, a paratoie chiuse, per l'evacuazione sulla soglia libera di una portata metà della massima prevista;
- 3) se gli sfioratori sono in tutto a soglia libera, la quota corrispondente alla evacuazione come in 2.

Se il serbatoio è dotato di scarichi di fondo in grado di erogare, con battente non superiore ad un terzo del dislivello fra la quota della loro bocca e la quota di massimo invaso, portate fino alla metà della massima prevista per gli sfioratori superficiali, è ammesso che nelle verifiche di sicurezza per la condizione a vuoto il coefficiente di intensità sismica siano ridotti a metà di quelli sopra indicati.

*B.5 Controlli del comportamento dell'opera - Osservazioni e misure.*

I progetti esecutivi degli sbarramenti comprenderanno anche un piano generale degli apparecchi e dispositivi di controllo del comportamento dell'opera, da installare nella struttura e nella fondazione.

Sono di norma da prevedere le osservazioni e misure: degli elementi meteorologici; dei livelli nel serbatoio e nelle eventuali falde a valle; delle perdite d'acqua dalla struttura e dal suo contorno; delle temperature esterne ed interne; delle sottopressioni e pressioni interstiziali; delle deformazioni e degli spostamenti della struttura e del terreno di appoggio sottostante e circostante; dei fenomeni sismici relativamente alle dighe ubicate in zone da ritenere soggette a sismi.

In linea generale sono da preferire apparecchi registratori, eventualmente con trasmissione dei dati a distanza; registratori saranno in ogni caso quelli di misura dei livelli nel serbatoio e dei fenomeni sismici.



Il piano di cui al primo comma dovrà anche indicare la frequenza con cui si intende eseguire ciascuna specie di osservazione nei diversi periodi seguenti: durante la costruzione; durante il primo invaso; nei primi tre anni di regolare esercizio; negli anni successivi.

## C *DIGHE MURARIE IN CENERALE.*

### C1 *Fondazione.*

L'andamento generale della superficie finale di fondazione non dovrà avere inclinazioni che non garantiscano la sicura stabilità dell'opera e dovrà mancare di gradini, risalti e cambiamenti bruschi di pendenza in qualsiasi direzione.

Le operazioni di scavo saranno da condurre con tutti gli accorgimenti affinché la superficie finale risulti fresca e non sconnessa dalle operazioni stesse.

Prima di iniziare il getto del calcestruzzo dovrà essere controllato, zona per zona, che la superficie di fondazione non abbia subito alterazioni. Essa verrà ripulita con getti di acqua ed aria in pressione ed i detriti verranno accuratamente asportati.

Nelle rocce di fondazione sarà realizzato uno schermo di impermeabilità con iniezioni di cemento o di altre idonee sostanze. Con adeguati provvedimenti di sicura efficacia, accuratamente studiati, potranno essere migliorate le caratteristiche meccaniche della roccia nel campo in cui l'opera determina sensibili tensioni

Iniezioni cementizie sono da eseguire lungo il piede del paramento di monte ai fini della tenuta tra roccia e struttura muraria

### C2 *Cemento - Calcestruzzo.*

Per la confezione del calcestruzzo verrà impiegato cemento della composizione più opportuna sia per la resistenza meccanica a lunga maturazione, sia per lo sviluppo del calore di idratazione, per il ritiro e per la resistenza chimica. Preliminarmente e nel corso dei lavori il cemento verrà sottoposto a sistematiche prove di controllo di tutte le sue caratteristiche.

Gli aggregati non dovranno essere gelivi e/o friabili; dovranno essere esenti da sostanze organiche ed inorganiche nocive alle caratteristiche del calcestruzzo.

Essi verranno divisi in almeno quattro classi granulometriche e, di norma, lavati

L'assortimento granulometrico e la dimensione massima degli aggreganti, la dose di cemento, il rapporto acqua-cemento, la specie e la dose di eventuali additivi, il procedimento di confezione, di trasporto, di posa in opera e di costipazione del calcestruzzo dovranno essere tali da conferire a questo i migliori requisiti di omogeneità, compattezza, impermeabilità, resistenza meccanica e durabilità, con particolare riferimento all'azione del gelo, all'azione chimica dell'acqua di invaso ed alle condizioni ambientali atmosferiche.

In sede di progettazione esecutiva della diga verranno eseguiti, presso un laboratorio specializzato, studi sperimentali preliminari circa la composizione del calcestruzzo, con gli aggregati ed il cemento dei quali si prevede l'impiego; essi dovranno indicare la composizione da adottare nella costruzione dell'opera per ottenere le migliori caratteristiche generali relative al particolare impiego; gli studi

stessi dovranno inoltre determinare la correlazione tra le resistenze, sia a compressione che a trazione (da prova indiretta o brasiliana) a 7 giorni, a 28 giorni ed a 90 giorni di maturazione.

### C3 *Getti e controlli del calcestruzzo.*

I getti dovranno susseguirsi in successione verticale con la maggiore possibile continuità.

Sospensioni protratte oltre l'inizio dell'indurimento del calcestruzzo richiedono che le superfici di ripresa siano accuratamente preparate con scarnitura, ravvivamento e perietta pulitura.

Nelle riprese di eventuali sospensioni a lungo termine sono da adottare provvedimenti per assicurare la tenuta e/o il drenaggio in prossimità del parametro di monte, nonché la migliore possibile continuità delle caratteristiche meccaniche della struttura su tutta la superficie di ripresa.

Durante l'esecuzione dell'opera verranno sistematicamente controllare le caratteristiche del calcestruzzo impiegato prelevando campioni dai getti e sottoponendoli a prove nel laboratorio di cantiere. I risultati verranno elaborati e riassunti con criteri statistici.

Nel primo periodo dei getti la frequenza dei prelievi per le prove di compressione sarà di almeno un prelievo per ogni  $500 \text{ m}^3$  di impasto e, comunque, non inferiore ad un prelievo per ogni giorno di lavoro fino a raggiungere il numero di trenta prelievi. Successivamente la frequenza di questi potrà essere ridotta ma, in ogni caso, non al di sotto di un prelievo ogni  $3000 \text{ m}^3$  di impasto oppure ad un prelievo ogni tre giorni di getto.

Con ciascun prelievo verranno confezionati quattro provini per prove a sette giorni di stagionatura, quattro provini per prove a ventotto giorni e quattro provini per prove a novanta giorni. Con i relativi risultati verranno determinate le resistenze caratteristiche, secondo le disposizioni di cui alla legge 5 novembre 1971. n. 1086. e successive norme tecniche relative alle opere di conglomerato cementizio.

Nel corso d'esecuzione dell'opera la resistenza caratteristica a compressione a novanta giorni potrà essere anticipatamente prevista sulla base dei risultati delle prove a ventotto giorni e della correlazione fra le resistenze caratteristiche alle due maturazioni determinata con le prove preliminari di cui al quarto comma dell'articolo precedente.

Essa, salvo il controllo con i risultati delle prove effettuate a novanta giorni, dovrà risultare costantemente non inferiore a quattro volte la tensione principale massima a compressione nella struttura quale determinata nell'analisi statica.

Per il controllo a breve termine del corretto funzionamento degli impianti di confezione del calcestruzzo e per i tempestivi eventuali interventi correttivi, verranno eseguite prove di tipo speditivo; prelevati giornalmente dei campioni del calcestruzzo, verranno da essi eliminati, mediante vagliatura, gli elementi degli aggregati di dimensioni maggiori (di norma superiori a  $30 \div 50 \text{ mm}$ ); con il passante saranno confezionati provini di dimensioni adeguate ( $100 \div 150 \text{ mm}$ ) che saranno poi sottoposti a prove di compressione a brevi stagionature,

#### C4. Azioni agenti sulla struttura

Le verifiche di sicurezza a serbatoio pieno dovranno porre a base, oltre che le pressioni sul paramento di monte correlative al livello di superficie dell' acqua alla quota di massimo invaso, quanto segue:

##### a) Spinta del ghiaccio

Per le dighe situate in zone in cui è prevedibile la formazione sulla superficie del serbatoio di un campo continuo di ghiaccio con spessore superiore a 20 cm, verrà anche considerata la spinta dovuta al ghiaccio, concomitante con le pressioni idrostatiche relative alla quota massima di regolazione.

La spinta del ghiaccio verrà considerata orizzontale, corrispondente alla pressione di 150 kPa ( $1,52 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  circa) con riferimerlto alla proiezione verticale della superficie di contatto fra ghiaccio e paramento della diga.

##### b) Azioni sismiche.

Per le dighe murarie del tipo A-b) e per le volte delle dighe del tipo A c) ubicate in zone ritenute soogette a *sismi* le forze  $F_h$  ed  $F_v$  di cui all'art. B-4 a) sono da moltiplicare F due.

Per le dighe del tipo A-a-2) e per i contrafforti delle dighe del tipo A-c) analogamente ubicate, sono da moltiplicare per due solo le forze orizzontali dirette perpendicolarmente al piano medio dello sprone o contrafforte:

Qualora le azioni inerziali della massa muraria vengano ricavate da una analisi dinamica basata su terremoti di progetto che tengono conto delle caratteristiche sismotettoniche del sito, le componenti orizzontali del terremoti di progetto dovranno avere spettri di risposta, in termini di accelernzione, tali che l'area compresa fra la curva con smorzamento 5% l'asse delle ascisse  $T_0$  e le ordinate per  $T_0 = 0$  e  $T_0 = 0,8$  s., sia maggiore o uguale alla analoga area corrispondente allo spettro di risposta di cui al punto B6 del decreto ministeriale del 3 marzo 1975, moltiplicata per due nei casi previsti nei due commi precedenti, La componente verticale di ciascun terremoto avrà spettro di risposta tale per cui l'area definita come sopra sia la metà di quella corrispondente alle componenti orizzontali.

Le tre componenti di eccitazione devono essere considerate contemporanee.

Qualora si segua la tecnica della analisi modale a partire da uno spettro di risposta, la sovrapposizione dei contributi modali dovuti alle tre componenti si esegue come qui di seguito precisato.

Sia  $Z^k$ , il contributo, del modo  $i$ , per la componente  $k$  ad un effetto  $Z$  del sisma (componente di tensione o di deformazione o di spostamento). Il contributo complessivo  $Z^k$  per la componente  $k$  è dato da:

$$Z^k = \sqrt{\sum_1 (z_1^k)^2} \quad (vi)$$

Il valore totale  $Z$  dell'effetto considerato è dato da:

$$Z = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (z^k)^2} \quad (vii)$$

Nelle opere la cui sicurezza può essere compromessa da una eccessiva ampiezza degli spostamenti dinamici dovuti al sisma (in particolare per dighe del tipo A-c), le verifiche degli effetti degli spostamenti dovranno essere condotte tenendo presente che gli spostamenti stessi, in occasione dei terremoti violenti, sono maggiori di quelli che si ricavano dal calcolo convenzionale elastico prima descritto.

In assenza di giustificazioni basate su più precise analisi, si terrà conto di spostamenti di valore doppio di quelli ora detti.

c) *Sollospinte nelle verifiche allo scorrimento.*

Nelle dighe dei tipi A-a) ed A-c) è da porre in conto, al fine della verifica di stabilità allo scorrimento anche una sottospinta agente nelle sezioni di fondazione e di ripresa dei getti, intesa come risultante delle pressioni idriche agenti sulle sezioni stesse, la cui distribuzione convenzionale è indicata nel seguito.

C.5 *Prove su modello.*

A complemento delle verifiche di sicurezza saranno sempre utili prove statiche, e se del caso, dinamiche, su modello. Esse sono di norma necessarie per strutture di particolare importanza, specie se ubicate in zone ritenute soggette a sismi

Prove idrauliche su modello circa le forme e l'efficienza delle opere di scarico di fondo e di superficie nonché sui relativi dispositivi di dissipazione di energia sono di norma necessarie.

*C6 Disposizioni particolari strutturali e costruttive.*

*a Franco e coronamento.*

Il franco netto non deve essere inferiore ad un metro.

La larghezza del coronamento dovrà essere tale da consentire la transitabilità con mezzi adeguati, anche meccanici, per la sorveglianza e la manutenzione dell'opera.

Il profilo di sommità e del parametro di valle delle dighe tracimabili deve essere prescelto così che la vena sfiorante vi aderisca, senza depressioni, su tutta l'altezza, ovvero che se ne distacchi subito dopo la soglia sommitale, provvedendo in questo caso, con adeguati dispositivi, alla aereazione al di sotto. In ogni caso sono da studiare, di norma con l'ausilio di modelli, le disposizioni protettive dalle erosioni alla base della struttura.

*b Cunicoli d'ispesione e drenaggi.*

Entro la struttura, in prossimità del piede del paramento di monte e lungo l'intero sviluppo di esso, è da disporre, quando e dove lo spessore, anche agli effetti statici, lo consente, un cunicolo praticabile, al quale faranno capo le estremità superiori delle perforazioni drenanti nella roccia e le estremità inferiori delle canne drenanti disposte nel corpo della struttura.

Sono da prevedere dispositivi per la misura delle portate delle permeazioni raccolte dalle perforazioni e canne predette e per la misura delle pressioni nelle perforazioni.

In quanto possibile il cunicolo avrà dimensioni che consentano l'esecuzione di successive perforazioni ed iniezioni.

*D DIGHE A GRAVITA ORDINARIE*

*a Caratteristiche. verifiche di sicurezza*

Si intendono a gravità ordinarie le strutture ad asse planimetrico rettilineo o a debole curvatura, con profilo trasversale fondamentale: triangolare e sezioni orizzontali piene, divise in conci da giunti permanenti, secondo piani verticali normali al loro asse, posti a distanze reciproche sufficienti a prevenire fessurazioni da cause termiche o da ritiro.

Per esse le verifiche di sicurezza sono da eseguire per la sezione di fondazione alla quota più bassa e per le sezioni a varie quote nella struttura, ponendo in conto i seguenti fattori: peso proprio, spinta idrostatica, sottospinta e, se del caso, spinta del ghiaccio e azioni sismiche.

*b Verifiche di stabilità allo scorrimento.*

Quando la diga è munita di canne e fori drenanti, nel corpo ed entro la fondazione, a distanza tra loro non superiore a m 2,50 il diametro dei quali non sia inferiore a 200 mm in fondazione e 120 mm nel corpo, le sottopressioni determinanti la sottospinta verranno assunte linearmente decrescenti in direzione monte-valle, da un valore pari alla massima pressione idrostatica di invaso in corrispondenza del paramento di monte, alla pressione idrostatica massima che si può verificare lungo la linea dei drenaggi tenuto conto della quota di libero efflusso di essi, indi al valore della massima pressione idrostatica che può verificarsi in corrispondenza del paramento di valle.

La pressione massima lungo la linea dei drenaggi è comunque da assumere non inferiore alla pressione idrostatica di valle aumentata di 0,35 volte la differenza tra la pressione idrostatica di monte e quella di valle.

Quando i drenaggi non soddisfano alle condizioni sopra indicate le sottopressioni verranno assunte variabili linearmente su tutto lo spessore della struttura fra i valori estremi sopra indicati.

Il rapporto fra la somma delle componenti parallele alla superficie di fondazione ed alle superfici di ripresa dei getti delle forze sopra specificate e la somma delle componenti normali non deve superare 0,75. Tale limite è elevato a 0,80 per le sezioni comprese fra il coronamento e 15 metri al disotto di esso se il supero di 0,75 deriva solo dalle azioni sismiche.

Agli effetti della verifica precedente non è ammessa, ai fini del calcolo, una pendenza delle superfici predette maggiore di 0,05.

Per le sezioni di fondazione il limite 0,75 è da ridurre convenientemente, quando le caratteristiche della roccia risultano sfavorevoli alla sicurezza allo scorrimento.

*c Verifica di resistenza.*

La verifica di resistenza è da condurre per le seguenti condizioni di carico:

- a serbatoio vuoto: per le azioni di peso proprio ed eventualmente sismiche;
- a serbatoio pieno: per le azioni di peso proprio, di pressioni idrostatiche sul paramento di monte, di spinta del ghiaccio ed eventualmente sismiche.

Dovranno risultare ai lembi di tutte le sezioni orizzontali:

- tensioni principali di compressione non superiori al carico di sicurezza del materiale determinato in base alla resistenza caratteristica come indicato in C3 (sesto comma);
- tensioni principali di trazione non superiori a 300 kPa (3 kgf/cm<sup>2</sup> circa).

Sono peraltro accettabili tensioni principali di trazione fino al limite di 500 kPa ( pari a circa  $5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  se il supero di 300 kPa é indotto unicamente dalle azioni sismiche.



## E DIGHE A SPERONI E A VANI INTERNI.

### *E1 Caratteristiche generali e verifiche di sicurezza.*

Si intendono a speroni e a vani interni le strutture costituite da una successione di elementi indipendenti (speroni) con profilo fondamentale triangolare, a reciproco contatto lungo il paramento di monte ed, eventualmente, anche in tutto o in parte lungo quello di valle e con superfici laterali distanziate nel tratto intermedio; gli elementi possono essere pieni o cavi nel tratto mediano delle sezioni orizzontali.

Se il valore del rapporto fra l'interasse di due elementi affiancati e lo spessore minimo di essi o la somma degli spessori minimi se trattasi di elementi cavi, è compresa fra due e quattro per almeno  $\frac{2}{3}$  dell'altezza dell'elemento, le verifiche di sicurezza sono da condurre secondo le indicazioni in DI relative alle dighe a gravità ordinaria, salvo che le sottopressioni si riterranno agenti soltanto sotto la testa di monte dell'elemento con riduzione a zero sul contorno di valle di essa.

Se il rapporto predetto è minore di due valgono integralmente le norme per le dighe a gravità ordinaria; se è superiore a quattro la struttura è da considerarsi speciale.

### *E.2 Caratteristiche particolari di forma. Giunti permanenti. Zoccolo. Superfici di fondazione.*

Le parti di diverso spessore di uno stesso elemento saranno raccordate con adeguata gradualità,

Nei casi di notevole disuniformità delle caratteristiche meccaniche della roccia di fondazione ed in particolare di notevole differenza delle caratteristiche stesse sull'area di base di singoli elementi, ciascuno di questi dovrà poggiare su di uno zoccolo ampiamente armato, all'elemento stesso raccordato, di larghezza alla base ,in direzione trasversale, convenientemente maggiore di quelle del gambo (o dei gambi) dell'elemento.

Gli zoccoli, a contallo fra loro agli estremi di monte e di valle saranno ivi divisi l' uno dall'altro da giunti permanenti; centralmente essi saranno amplimente distaccati, lasciando libero un ampio vano atto a consentire la dissipazione di sottopressioni, fermo restando che queste dovranno essere valutate con la regola precisata in E1. Analogo vano dello zoccolo e necessario in corrispondenza del vano interno degli elementi cavi.

Ove non siano realizzate queste condizioni, valgono per la determinazione della sottospinta le norme mdicate per le dighe a gravità ordinarie.

E' opportuno che zoccolo ed elemento siano divisi l uno dall'altro da un giunto permanente conformato secondo una superficie con generatrici orizzontali in direzione trasversale, con direttrice lievemente risaliente da monte a valle.

La superficie di fondazione, o diretta dei singoli elementi, ovvero degli zoccoli, dovrà avere risalienza ancorché modesta, da monte a valle. La fondazione diretta dei gambi dovrà essere pressoché orizzontale nella direzione trasversale su tutta la larghezza del gambo.

Sono da evitare gli elementi cavi aventi notevole dislivello fra le superfici di appoggio dei due gambi. Sono in ogni caso da adottare disposizioni strutturali atte a prevenire pericolo di fessurazioni da tensioni secondarie conseguenti al dislivello predetto.

## E DIGHE A VOLTA

### F1 *Caratteristiche generali e tipi particolari.*

Si intendono per dighe a volta le strutture monolitiche o a giunti bloccati fra conci, con sezioni orizzontali decisamente arcuate e impostate contro roccia, direttamente o attraverso una struttura intermedia di ripartizione (pulvino).

I giunti fra i conci in cui per ragioni costruttive le strutture potranno essere divise sono da bloccare solo dopo trascorso un tempo sufficiente a consentire liberamente la maggior parte delle deformazioni derivanti dal raffreddamento del calcestruzzo e dal ritiro proprio del cemento.

Si distinguono convenzionalmente, ai fini dell'analisi statica, in:

- a) *dighe ad arco*, quando la forma ed i rapporti di dimensione sono tali che la resistenza alla spinta dell'acqua ed eventualmente del ghiaccio ed alle azioni sismiche è sopportata in grande prevalenza per effetto della curvatura longitudinale (arco);
- b) *dighe ad arco gravifà*, quando la forma ed i rapporti di dimensione sono tali che alla resistenza predetta concorrono in misura singolarmente non modesta sia l'effetto della curvatura longitudinale che quello trasversale di mensola;
- c) *dighe a cupola*, quando la forma ed i rapporti di dimensione sono tali che la reattività elastica è assimilabile a quella di lastra a doppia curvatura.

L'attribuzione delle singole opere ad uno dei tipi sopra elencati, da cui conseguono i diversi criteri adottati nella analisi statica dovrà essere ampiamente giustificata.

### F2 *Verifiche di sicurezza.*

L'analisi statica delle dighe a volta è da eseguire per le condizioni di serbatoio vuoto e di serbatoio pieno.

Per la condizione di serbatoio vuoto sono da considerare azioni sollecitanti:

le variazioni di temperatura e il ritiro e, per opere ubicate in zone soggette a sismi, le azioni inerziali orizzontali; quando hanno notevole influenza sul regime statico, sono da considerare anche il peso proprio e, per opere ubicate come sopra, la relativa azione inerziale verticale.

Per la condizione di serbatoio pieno sono da considerare, oltre alle precedenti,:

le pressioni dell'acqua, la spinta del ghiaccio e, per opere ubicate in zone soggette a sismi, le pressioni dinamiche dell'acqua.

Agli effetti delle verifiche di cui sopra la distribuzione delle variazioni della temperatura interna della struttura per il periodo di esercizio verrà dedotta dalle presumibili vicende della temperatura dell'aria e della acqua; si potrà ammettere che nel corso dell'anno queste seguano andamento sinusoidale, con massimo e minimo da stabilire in base all'esame dei regimi termici esterni rispettivi, osservati o presunti.

L'effetto residuo del ritiro proprio e dell'esaurimento del calore di presa del cemento verrà equiparato a quello di un abbassamento uniforme della temperatura compreso almeno fra 5 °C e 10 °C a seconda delle caratteristiche termiche del cemento, delle condizioni climatiche della zona, del ritiro dei getti, dell'intervallo di tempo previsto intercorrente fra questi e il bloccaggio, dei giunti e delle dimensioni della struttura.

Sono ammissibili tensioni principali massime entro i limiti seguenti:

- a) *a serbatoio vuoto*, per effetto del peso proprio;
- 1) se di compressione: non maggiori del carico di sicurezza determinato in base alla resistenza caratteristica prevista in progetto;
  - 2) se di trazione: non maggiori di 800 kPa (pari a circa  $8 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ );
- b) *a serbatoio pieno*, per effetto, insieme, del peso proprio, della spinta idrostatica e di quella eventuale del ghiaccio
- 1) se di compressione: non maggiori del carico di sicurezza stabilito come in A.1);
  - 2) se di trazione:  
sul paramento di monte non maggiori di 500 kPa (pari a circa  $5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ );  
sul paramento di valle non maggiore di 800 kPa (pari a circa  $8 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ ).

Con l'aggiunta, alle azioni attive di cui ai punti a) e b), delle coazioni per variazioni di temperatura esterna, per esaurimento del calore di presa e per ritiro, è ammissibile che le tensioni principali massime raggiungano valori superiori del 20% a quelli indicati nei precedenti punti a) e b); con l'aggiunta ancora delle azioni sismiche, sono ammissibili tensioni ulteriormente superiori del 20% a quelli limiti indicate in a) e b).

## G DIGHE A VOLTE O A SOLETTE POGGIATE SU CONTRAFFORTI

### *G1 Caratteristiche generali.*

Le strutture in oggetto sono costituite di una successione di volte o di solette poggiate su contrafforti pieni o cavi, aventi profilo fondamentale triangolare.

Esse sono adottabili soltanto quando i dislivelli tra le fondazioni dei contrafforti contigui sono moderati e quando la roccia di appoggio di questi ha caratteristiche meccaniche elevate ed uniformi sia lungo i singoli contrafforti che per l'insieme di essi.

I tipi a solette e i contrafforti cavi non sono ammissibili in zone da ritenere soggette a sismi.

I contrafforti debbono essere convenientemente allargati e rinforzati alla base ed in prossimità di entrambi i paramenti.

Le solette fra coppie contigue di contrafforti saranno strutturalmente indipendenti ed il loro collegamento ai contrafforti non ne dovrà sensibilmente ostacolare le deformazioni termiche ed il ritiro.

Di regola è da escludere la tracimabilità. Qualora, in casi speciali, si ritenesse di dovervi far ricorso, non è ammessa la caduta libera dell'acqua fra i contrafforti e dovrà essere previsto apposito elemento strutturale, opportunamente profilato ed appoggiato sui contrafforti, per sostenere la vena sfiorante per tutta l'altezza della caduta e ad esso faranno seguito dispositivi di dissipazione dell'energia, protettivi dalle erosioni della roccia di base.

### *G2 Verifiche di sicurezza.*

Le verifiche statiche dei contrafforti sono da effettuare con le norme indicate in D-1 ma le sottopressioni sui contrafforti verranno supposte variabili linearmente dal valore pari alla massima pressione idrostatica di invaso in corrispondenza del paramento di monte fino al valore zero ad una distanza da detto paramento pari a due volte lo spessore del contrafforte al lembo di monte.

Per la verifica delle volte sono da considerare archi elementari indipendenti normali alle generatrici, adottando i criteri, con la limitazione delle tensioni indicate in F-2.

## *H DIGHE DI MATERIALI SCIOLTI*

### *H1. Caratteristiche generali e suddivisione*

Le dighe in oggetto sono costituite di un rilevato formato con materiali litici sciolti micro e/o macroclastici. Il dispositivo di tenuta potrà essere formato con materiali litici appropriati ovvero con materiali artificiali.

I materiali di formazione del rilevato possono essere approvvigionati direttamente per cavatura (*terre*) o ricavati per abbattimento di rocce (*pietrame*).

Si distinguono strutture:

- a) di terre omogenee: costituite totalmente di terre di permeabilità uniforme di misura atta da sola a realizzare la tenuta;
- b) di solo terra o di terra e pietrame, zonate:  
costituite solo di materiali naturali, di specie diverse, disposti in diverse parti della sezione, differentemente ma pur sempre ampiamente permeabili e di una zona di terra di bassa permeabilità (nucleo) con funzione di tenuta;
- c) di terra o pietrame o terra e pietrame con dispositivo di tenuta di materiali artificiali:  
costituite di materiali naturali di una o più specie, diversamente ma pur sempre ampiamente permeabili, e di dispositivo di tenuta a monte (manto) o interno (diaframma) di materiali artificiali.

Il tipo a) non è da adottare per altezze superiori 30 metri.

La posa in opera dei materiali sciolti costituenti il corpo della struttura avverrà per costipazione in stato di opportuna umidità.

E' esclusa la posa in opera con il procedimento idraulico o semi-idraulico.

L'idoneità dei materiali di cui è previsto l'impiego per il rilevato e, in particolare, le loro proprietà meccaniche e la permeabilità verranno determinate in fase di progettazione esecutiva con prove di laboratorio e, eventualmente, con rilevati sperimentali. Nel giudizio di idoneità e da tener conto delle differenze che potranno verificarsi nei risultati per la diversità fra le condizioni di sperimentazione e le condizioni di posa in opera nonché le condizioni in cui i materiali stessi verranno a trovarsi a termine costruzione e durante l'esercizio del serbatoio.

E' comunque da escludere l'impiego di materiali friabili, alterabili al contatto dell'acqua e dell'aria e/o contenenti in sensibile misura residui organici o sostanze solubili.

Prima dell'inizio della costruzione dell'opera sono da eseguire, con le attrezzature di cantiere, ulteriori rilevati sperimentali al fine di stabilire modalità e parametri della posa in opera e verificare la rispondenza delle proprietà meccaniche e di permeabilità risultanti con quelle di progetto.

Prove preliminari specifiche saranno da eseguire anche con le attrezzature di cantiere relativamente ad eventuali trattamenti di miscelazione di materiali tra loro diversi.

### *H3 Disposizioni strutturali particolari.*

Al fine di realizzare la tenuta di fondazione, una congrua parte del rilevato, nel caso di una diga omogenea, o il nucleo di una diga zonata, dovrà essere convenientemente addentrato in una formazione impermeabile, ove questa esiste a limitata profondità.

Se formazioni impermeabili sono presenti solo a notevole profondità oppure se risulta difficoltosa l'adozione della soluzione di cui al comma precedente e, comunque, per le dighe di cui al punto c) dell'art. H-1, un idoneo dispositivo (muro di taglione, diaframma di calcestruzzo o similari, schermo ottenuto mediante iniezioni) dovrà assicurare la continuità tra il dispositivo di tenuta del rilevato e la formazione impermeabile di fondazione.

Qualora la tenuta di fondazione non sia realizzabile con i provvedimenti di cui al primo e secondo comma precedenti, sono da adottare dispositivi atti a ridurre i gradienti delle pressioni idriche sotterranee lungo la fondazione nella misura tale che siano sicuramente evitate erosioni interne del terreno.

Opportuni dispositivi (filtri) nel corpo della struttura e in fondazione dovranno evitare che si verifichino effetti erosivi interni a seguito di filtrazione, in particolare nelle zone di contatto tra materiali di granulometrie diverse.

Condotte di qualunque specie, di scarico, di deviazione ed altro non dovranno attraversare il corpo del rilevato.

Condotte del genere potranno essere ammesse solo in fondazione a condizione che esse siano completamente incassate entro trincee in roccia lapidea in posto ed abbiano ricoprimento di calcestruzzo di conveniente spessore. Inoltre, nei tratti in cui esse sottopassano le zone della struttura costituite di materiali impermeabili o scarsamente permeabili, dovranno (ove non siano in acciaio) essere dotate di speciale rivestimento interno tale da garantire la tenuta anche in caso di loro fessurazione, escluso che esso consista di semplici verniciature.

### *H4. Franco. Larghezza di coronamento. Organi di scarico.*

Il franco netto non deve essere inferiore ai valori seguenti:

Altezza della diga:	≤15	30	45	60	75	≥90
Franco netto	1,5	2,5	3,2	3,6	3,9	4,0

Per i valori intermedi dell'altezza, il franco netto è da determinare per interpolazione.

Ai valori sopra indicati sono da aggiungere i prevedibili abbassamenti del coronamento successivi al termine della costruzione derivanti dal consolidamento sia del terreno di fondazione che del rilevato.

La larghezza di coronamento deve essere stabilita nella misura per cui la posa in opera del materiale possa essere compiuta meccanicamente fino in sommità in maniera del tutto corretta.

Comunque, essa non può essere inferiore al doppio del franco netto minimo quale sopra indicato.

La portata massima da scaricare per il più gravoso evento di piena previsto deve essere evacuabile unicamente con gli scarichi di superficie.

Essi potranno essere costituiti da una o da più soglie libere ovvero da soglie libere e da soglie munite di paratoie automatiche .

In questo secondo caso, considerata l'ipotesi di mancato funzionamento delle paratoie, la portata pari ad almeno metà della massima che è previsto di scaricare per il più gravoso evento di piena, deve essere evacuabile con le soglie libere, ammesso peraltro che in tale condizione il franco netto si riduca a valori metà di quelli sopra indicati, fatto salvo il minimo di un metro. Ove quali sfioratori di superficie si intenda adottare il tipo a calice od analoghi, soggetti a saturazione, le dimensioni di essi dovranno essere tali che la quota di saturazione risulti superiore a quella di massimo invaso aumentata di due terzi del franco netto

Sfioratori di quest'ultima specie saranno oggetto di specifiche prove su modello. In ogni caso dovranno essere dotati di ampi condotti per l'alimentazione dell'aria al passaggio della corrente dal pozzo verticale o subverticale alla galleria suborizzontale e ad ogni altro punto di singolarità della corrente.

#### *H5 Verifiche di sicurezza.*

La stabilità della diga dovrà essere verificata relativamente alle seguenti condizioni:

- a termine costruzione;
- a serbatoio pieno con il livello al massimo invaso;
- a seguito di rapido vuotamento del serbatoio dal livello massimo al livello di minimo invaso

e, ove sia significativo,

- anche a livelli intermedi.

Saranno di norma omesse le verifiche per la terza condizione per le dighe del tipo c) di cui in H-1 con dispositivo di tenuta a monte (manto).



L'analisi statica deve proporsi di individuare, nelle varie condizioni sopra indicate, le superfici di potenziale scorrimento più prossime alla instabilità, sia all'interno del rilevato, sia nell'insieme costituito dal rilevato e dai terreni di fondazione e ciò relativamente alla sezione maestra della struttura e ad altre sezioni trasversali opportunamente scelte

Il rapporto fra le forze (o momenti) reattivi capaci di opporsi allo scorrimento lungo le superfici predette, e le forze (o momenti) attive che tendono a produrlo, non dovrà essere inferiore a:

1,2 a termine costruzione;

1,4 a serbatoio pieno;

1,2 a seguito di rapido vuotamento.

Per le opere di maggior rilievo per caratteristiche della diga e dei terreni di fondazione sono raccomandate verifiche di stabilità con procedimenti di calcolo diversi.

#### *H.6 Disposizioni particolari per le opere ubicate in zone ritenute soggette a sismi.*

La scelta dei materiali per il rilevato ed il grado della loro costipazione nella posa in opera dovranno essere tali da ridurre il più possibile l'abbassamento del coronamento che potrebbe essere prodotto per effetto di assestamento da un sisma.

Il franco netto di coronamento quale indicato in H-4 è da aumentare delle quantità seguenti (interpolando per le altezze intermedie):

Altezza della diga:	$\leq 15$	30	$\geq 45$
aumento del franco sino a	0,30	0,70	1,00

La larghezza minima di coronamento indicata in H-4 è da aumentare del doppio dell'aumento del franco.

Il nucleo (di terra) ed i relativi filtri, sia a monte che a valle, dovranno avere spessori convenientemente superiori agli ordinari, tali da proteggere dalla evoluzione in erosione interna di eventuali lesioni del nucleo; assai ampi dovranno essere i relativi dispositivi di raccolta e scarico delle perdite.

Pure assai spessi e molto permeabili dovranno essere i drenaggi dietro i muniti di tenuta (al paramento) e ancora assai ampi i dispositivi di scarico relativi. Comunque, con la opportuna ripartizione dei materiali nei riguardi granulometrici, la struttura dovrà essere protetta, a fronte di accidentale rottura del manto, dagli effetti sulla stabilità del materiale del corpo (erosione interna) e sulla stabilità del paramento di valle da eccessi di velocità del flusso delle perdite.

Non sono da impiegare tappeti impermeabili quali dispositivi per la riduzione del gradiente di pressione lungo la fondazione.

Con riferimento alle situazioni indicate in H-5 è da eseguire la verifica di stabilità con il criterio pseudo-statico tenendo anche conto delle forze sismiche agenti sulle masse dei materiali e dell'acqua in essi interclusa quali indicate in B-4, ad eccezione di quelle orizzontali di cui al punto 2 di B-4 a). L'azione dinamica dell'acqua dell'invaso deve intendersi applicata sul paramento di monte anche se questo è permeabile.

Il relativo coefficiente di sicurezza per tutte le situazioni previste in H-5 non dovrà risultare inferiore a 1,2.

Per le dighe di particolare importanza per altezza, da costruire in zone di alta sismicità, è opportuna la verifica con metodi di analisi dinamica come pure la prova su modelli.

La capacità degli scarichi di fondo dovrà essere tale da rendere possibile l'abbassamento rapido del livello della acqua per i superiori due terzi dell'altezza di invaso iniziando dal massimo invaso, abbassamento di cui potrebbe insorgere la necessità in caso di lesione pericolose del rilevato.

#### *H7.- Sbarramenti di tipo misto*

Per gli sbarramenti di tipo misto, costituiti in parte da strutture di calcestruzzo ed in parte da strutture di materiali sciolti, valgono per le singole parti le rispettive norme. Dovrà peraltro essere particolarmente studiata ed in fase esecutiva curata la giunzione fra le due specie di strutture in vista della loro diversa deformabilità.

## I) SBARRAMENTI DI LAMINAZIONE DELLE PIENE.

Gli sbarramenti di qualsiasi tipo aventi l'ufficio principale di invaso dell' acqua per attenuazione delle portate di piena a valle (lamiazione), siano essi della specie a luci di scarico libere o di quella a luci regolabili, debbono essere dotati oltreché di scarichi di superficie, di dispositivi di chiusura delle luci predette (paratoie o ture a rapida rimozione) tali da consentire il riempimento del serbatoio a fine costruzione della diga, a scopo di collaudo, nonché periodicamente, durante l'esercizio, a scopo di controllo dello stato di efficienza dell'opera.

## L) TRAVERSE FLUVIALI

Per traverse fluviali si intendono gli sbarramenti che determinano un rigurgito contenuto nell'alveo del corso d'acqua. Sono soggette alle presenti norme quelle che determinano un volume totale di invaso superiore a  $100.000 \text{ m}^3$  qualunque sia l'altezza della struttura.

Nei caso che il rigurgito interessi argini già esistenti, deve essere disnostrata l'idoneità di essi in condizioni di sicurezza alla permanente trattenuta dell' acqua

In sede di progettazione esecutiva dell' opera é da rilevare dettagliatamente la costituzione del terreno di fondazione per accertarne l'idoneità a sopportare i carichi trasmessi dalla struttura nonché la permeabilità nel caso di formazioni sciolte; corrispondentemente dovranno essere determinate le caratteristiche del moto di filtrazione che verrà a stabilirsi al di sotto delle fondazioni e previsti i dispositivi per la limitazione delle perdite e che debbono anche determinare la sicura stabilità del terreno e delle stutture.

Le verifiche di stabilità delle strutture saranno da eseguire sia per le pile che per i dispositivi intermedi (platee), ponendo in conto anche le eventuali azioni sismiche. Il progetto deve altresì prevedere:

- la difesa dalle erosioni del fondo e delle sponde dell'alveo a valle della struttura, ricorrendo in proposito ad esperienze su modello per le opere più importanti;
- il rigurgito provocato dalla struttura ed i conseguenti provvedimenti di difesa a monte;
- i sistemi di comprovata affidabilità di manovra delle paratoie.

## M) SBARRAMENTI DI TIPI VARI

Si intendono di tipo vario tutte le strutture di sbarramento diverse da quelle definite in quanto precede .

I progetti di tali strutture ed i criteri di esecuzione devono essere in armonia con quanto indicato nelle presenti norme per i tipi strutturali assimilabili.

## 1                      **Generalità**

Sebbene oggi in disuso nella maggior parte delle applicazioni di ingegneria strutturale tuttavia la teoria dell'ellisse di elasticità, ideata da Culmann, riveste ancora grande importanza nelle strutture ad arco, quanto meno per un approccio in prima approssimazione<sup>20</sup>.

La teoria dell' ellisse di elasticità é stata applicata sistematicamente da W. Ritter e per lunghi anni ha costituito il metodo più elegante per lo studio delle deformazioni delle travi ad asse rettilineo o curvilineo e di sezione costante o variabile, studio della massima importanza, sopra tutto perchè rappresentava l'unico mezzo per ottenere le reazioni nelle travi staticamente indeterminate.

Questa teoria riunisce in sintesi tutte le proprietà della deformazione delle travi, consentendo di determinare rapidamente le rotazioni e gli spostamenti di una sezione provocati da date forze, oppure le forze necessarie per provocare dati spostamenti.

Essa consente anche di prevedere facilmente e intuitivamente le caratteristiche qualitative della deformazione stessa.

Col suo impiego si risolvono in modo immediato, e con evidente controllo visivo, problemi che presenterebbero difficoltà talvolta notevoli.

Inoltre, come il principio dei lavori virtuali e il teorema di Castigliano, questa teoria tiene conto, quando si voglia, anche dell'influenza dello sforzo normale e dello sforzo di taglio, senza che per questo il procedimento risulti sensibilmente complicato o modificato.

la teoria dell'ellisse di elasticità è fondata sulla proporzionalità fra le forze e gli spostamenti, cioè sul principio della sovrapposizione degli effetti.

---

<sup>20</sup> Il disuso é dovuto a due fattori concomitanti:

- la riduzione del numero di esecuzioni di strutture ad arco od a volta, riduzione dovuta a necessità tecnologiche che hanno portato sempre più, soprattutto per i ponti alla sostituzione di strutture curve con strutture rettilinee
- la possibilità di eseguire i calcoli tramite metodi numerici che si avvalgono dell' uso dei computer (per esempio il metodo agli elementi finiti)

Tuttavia é da ricordare che il calcolo col il metodo dell' ellisse di elasticità non necessariamente si limita ad una valutazione approssimata dello stato tensionale della struttura (ad arco, reticolare, travi piene, pilastri ecc...) ma da delle soluzioni valide anche in sede "definitiva". All'uopo basti pensare che la quasi totalità delle strutture realizzate sino agli anni 70 e forse anche oltre, ed in specie quelle ad arco, sono state calcolate e verificate con il metodo in parola.

Quindi per la sua validità è necessario non solo che il materiale della struttura si deformi rispettando la legge di Hooke, ma anche che le forze esterne non siano influenzate dalla deformazione della trave, ossia che le loro rette d'azione non siano da essa sensibilmente modificate.

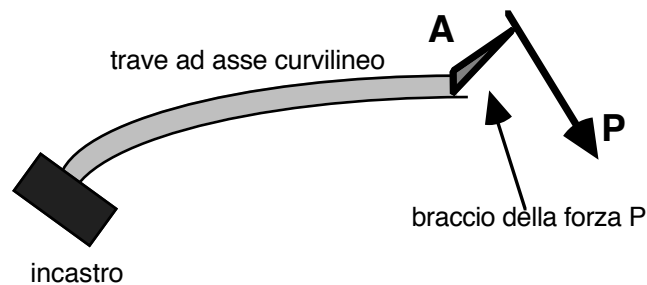
Il Belluzzi (vol III) espone la teoria delle ellisse di elasticità suddividendola nelle seguenti parti:

- 1) Esistenza dell'ellisse e della proprietà che la definisce.
- 2) Deduzione dei teoremi fondamentali (supposta già nota l'ellisse), che costituiscono la parte utilizzabile della teoria.
- 3) Determinazione dell'ellisse di elasticità nei vari casi.
- 4) Le principali applicazioni.

Noi seguiremo entro certi limiti tale esposizione, limitandoci alle applicazioni di nostro interesse.

## 2 Corrispondenza fra le rette delle forze e i centri di rotazione

Poniamo l'attenzione su una struttura piana ad asse curvilineo (a piccola curvatura) e di sezione gradualmente variabile, comunque vincolata, e soggetta a una forza  $P$ , complanare con la struttura, agente in una sezione  $A$



Le sezioni rette sono tali che per la deformazione della trave l'asse geometrico non esca dal suo piano; ciò che avviene, in particolare, se tutte le sezioni sono simmetriche rispetto al piano suddetto; oppure, in generale, quando la flessione è dappertutto retta, ossia quando il piano dell'asse e della forza  $P$  (piano di sollecitazione) contiene uno degli assi principali d'inerzia di ciascuna sezione.

Lo spostamento di ogni punto della trave avviene quindi parallelamente a tale piano.

La forza  $P$  agente sulla sezione  $A$  può avere qualunque retta d'azione nel piano dell'asse geometrico, e può essere trasmessa alla sezione per

mezzo di un braccio rigido; oppure può essere la risultante di un sistema di forze applicate direttamente alla sezione A.

Nei casi di maggior interesse la struttura (trave) è a mensola, e la sezione A è quella terminale e libera, in generale, la trave può essere invece vincolata ai due estremi, o anche in altri punti, e A è una sezione intermedia qualsiasi

In tali ipotesi la deformazione della trave è dunque piana

Quindi la traccia della sezione A non esce dal piano dell'asse geometrico

Quindi lo spostamento della sezione A (che si considera rigido) si può considerare come una rotazione piccolissima intorno a un centro C contenuto in tale piano, ed è determinato quando si conosce la posizione di C e l'angolo  $\varphi$  di rotazione.

Il centro C dipende soltanto dalla retta d'azione  $r$  della forza P e non dalla sua intensità, perché se si raddoppia P, raddoppia l'angolo  $\varphi$  della rotazione, che avviene intorno allo stesso centro C; quindi a ogni retta d'azione  $r$  corrisponde un unico centro C.

Viceversa, a due rette d'azione  $r_1$  ed  $r_2$  non può corrispondere lo stesso centro C, altrimenti scegliendo due opportuni valori  $P_1$  e  $P_2$  delle forze agenti secondo  $r_1$  ed  $r_2$  tali da produrre angoli di rotazione uguali, la risultante di  $P_1$  e  $P_2$ , che non è nulla, lascierebbe ferma la sezione A; ossia la trave non si deformerebbe.

Viene così definito nel piano dell'asse geometrico una corrispondenza biunivoca fra le rette  $r$  d'azione delle forze P agenti sulla sezione A e i punti C centri di rotazione della sezione A, tale corrispondenza che gode di talune proprietà:

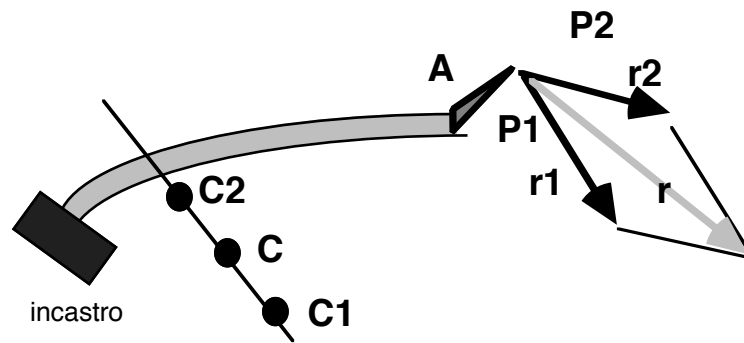
- a) **il centro C di rotazione non può mai essere sulla corrispondente retta  $r$  d'azione della forza  $P$ <sup>21</sup>,**

*Quindi la corrispondenza non ha elementi autoconiugati.*

- b) Siano  $r_1$  ed  $r_2$  le rette d'azione di due forze  $P_1$  e  $P_2$  applicate alla sezione A

---

<sup>21</sup> infatti in caso contrario la rotazione farebbe spostare il punto d'applicazione della forza normalmente alla forza stessa; la quale perciò, pur deformando la trave, non compirebbe lavoro



Detti  $C_1$  e  $C_2$  i corrispondenti centri delle rotazioni di A, di angoli piccolissimi  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

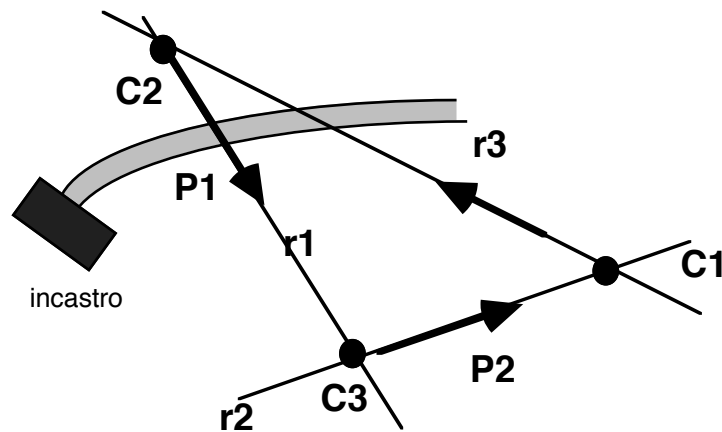
Facciamo agire entrambe le forze, cioè la loro risultante R, di retta d'azione r passante per il punto d'incontro di  $r_1$  ed  $r_2$ : la sezione A subisce entrambe le rotazioni, cioè una rotazione unica, di angolo  $\varphi_1 + \varphi_2$  intorno a un centro C che, com'è noto dalla cinematica, è il baricentro dei centri  $C_1$  e  $C_2$ , caricati di masse uguali agli angoli  $\varphi_1 + \varphi_2$

Ne segue che C è allineato con  $C_1$  e  $C_2$

Se si varia l'intensità di una delle due forze  $P_1$  e  $P_2$ , la retta r della risultante R ruota intorno al punto d'incontro di  $r_1$  ed  $r_2$  e varia anche uno degli angoli  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  per cui il centro C si sposta lungo la congiungente di  $C_1$  e  $C_2$ .

Pertanto, a un fascio di rette r corrisponde una punteggiata di punti C.

- c) Sia  $C_1$  il centro di rotazione corrispondente a una forza  $P_1$  di retta  $r_1$ , e sia  $P_2$  una seconda forza di retta  $r_2$ , passante per  $C_1$ .



Se applichiamo la  $P_1$  quando la  $P_1$  è già applicata, la  $P_1$  non compie lavoro indiretto  $L_{2,1}$ , perchè il suo punto d'applicazione si sposta normalmente a  $r_2$ .

Se invece applichiamo la  $P_2$  quando la  $P_1$  è già applicata, per il teorema di Betti anche il lavoro indiretto  $L_{1,2}$  della  $P_1$  dev'essere nullo.

Perciò il centro  $C_2$  dev'essere sulla  $r_1$ .

Dunque la corrispondenza in esame è tale che se una retta  $r_1$  passa per  $C_1$  corrispondente a  $r_1$ , anche la  $r_1$  passa per  $C_2$  corrispondente a  $r_1$ ; ossia la corrispondenza è involutoria.

Questa proprietà comprende anche quella cui al precedente punto b), perchè a tutte le rette passanti per  $C_1$  corrispondono dei punti che sono sulla  $r_1$ . In particolare, alla retta  $r_2$  passante per  $C_1$  e  $C_2$  corrisponde il punto d'incontro  $C_3$  di  $r_1$  ed  $r_2$ , ossia il triangolo  $C_1, C_2, C_3$  è autoconiugato.

Quando la sezione A è quella terminale libera della trave e l'altra sezione estrema B è perfettamente incastrata, la rotazione di A intorno a C è lo spostamento assoluto di A, perchè la sezione B è fissa.

Se invece anche la sezione B è libera (o vincolata in modo diverso da un incastro), la rotazione di A intorno a C è lo spostamento relativo di A rispetto alla sezione B, ed è dovuta soltanto alla deformazione elastica della trave AB.

Nel primo caso la forza P provoca in B una reazione



$$R_b = -P;$$

nel secondo caso, oltre alla forza  $P$  in  $A$ , si deve applicare anche la forza  $-P$  in  $B$ .

### 3 L'ellisse di elasticità

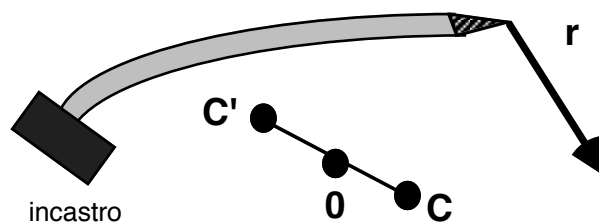
La corrispondenza definita nel piano dell'asse geometrico fra le rette  $r$  d'azione delle forze  $P$  applicate alla sezione  $A$  e i centri  $C$  di rotazione della  $A$  gode, come visto, delle seguenti proprietà :

- 1) biunivoca;
- 2) involutoria;
- 3) non ha elementi autoconiugati.

Perciò la corrispondenza è una polarità, e la sua conica fondamentale immaginaria.

Se alla sezione  $A$  applichiamo una forza una coppia ( $o$ , che è lo stesso agente secondo la retta all'infinito del piano, il centro  $O$  di rotazione coincide col centro della polarità, tale centro è detto *centro elastico* .

Esso è certamente un punto proprio, perchè  $C$  non può mai essere sulla retta della forza<sup>22</sup> ).



Sarebbe oltremodo scomodo lavorare su una polarità retta da una conica immaginaria, per superare tale ostacolo instauriamo una nuova polarità tra le cennate rette  $r$ , di azione delle forze, ed i simmetrici  $C'$  di  $C$  rispetto al detto centro  $O$  della polarità prima definita.

<sup>22</sup> Infatti se  $C$  fosse all'infinito, la sezione  $A$  subirebbe una traslazione, che non farebbe compiere lavoro alla coppia agente

Tale nuova polarità ha come conica fondamentale un' ellisse reale<sup>23</sup>.

Questa ellisse detta di Culmann é l' *ellisse di elasticità relativa alla sezione A*.

Quando la trave è a mensola e la sezione A è quella terminale della trave, si ha l'ellisse degli spostamenti terminali o ellisse terminale di elasticità. Essa giace nel piano dell'asse geometrico e delle forze.

Dunque, per quanto si è detto, l'ellisse di elasticità è quella conica rispetto alla quale le rette  $r$  d'azione delle forze applicate alla sezione A e i rispettivi centri C di rotazione della A si corrispondono come rette e antipoli, o come punti e antipolari.

Data la trave e fissata la sezione A che interessa, l'ellisse è completamente determinata.

Quando é nota l'ellisse di elasticità, data una forza P applicata nella sezione A si ottiene dunque il centro di rotazione della A tracciando l'antipolo della retta d'azione  $r$  della forza P ( e viceversa).

Quindi il problema elastico é ricondotto ad un problema geometrico, semplice e di soluzione immediata.

Una forza avente retta d'azione passante per il centro O dell' ellisse ha antipolo all' infinito nella direzione del diametro coniugato  $d'$  quindi lo spostamento della sezione di applicazione della forza é una semplice traslazione nella direzione ortogonale a  $d'$ <sup>24</sup> e viceversa.

### 3 1 Rotazioni e spostamenti provocati da coppie e forze

I teoremi in questione esprimono le rotazioni e gli spostamenti della sezione A provocati da coppie o da forze:

a) *Rotazione provocata da una coppia.*

Sulla sezione A agisca una coppia M nel piano dell'asse geometrico

La A (come pure ogni punto del piano, collegato rigidamente con essa) ruota intorno al centro elastico O dell'ellisse di un angolo  $\varphi$  proporzionale al momento M della coppia dunque, detta G una costante di proporzionalità detta *peso elastico*, potremmo scrivere:

---

<sup>23</sup> Infatti, non è una parabola, perchè ha il centro proprio e non è un'iperbole, perchè entrambi gli assintoti sarebbero autoconiugati, ossia conterrebbero il corrispondente C' nella nuova polarità, e quindi anche il centro C in quella primitiva

<sup>24</sup> quindi in genere lungo una direzione diversa da quella della retta d'azione salvo che questa non coincida con uno degli assi dell' ellisse.

$$\varphi = G M \quad (II-1)$$

donde:

$$G = \frac{\varphi}{M} \quad (II-2)$$

ossia è l'angolo  $\varphi$  provocato dal momento  $M = 1$  e dà una misura dell'attitudine che ha la trave a deformarsi<sup>25</sup>.

G ha dimensioni  $[Kgm^{-1}]$

b) *Spostamento provocato da una coppia.*

Determiniamo lo spostamento che un punto generico  $a$  della sezione  $A$ , oppure collegato rigidamente con essa, subisce per effetto della coppia  $M$

Ruotando la sezione  $A$  intorno al centro elastico  $O$ , lo spostamento  $\delta$  avviene in direzione normale alla congiungente  $Oa = d_a$  ed essendo la rotazione  $\varphi$  piccolissima, esso vale

$$\delta = \varphi d_a \quad (II-3)$$

e sostituendovi la (II-1) avremo:

$$\delta = G M d_a \quad (II-3')$$

ovvia la definizione delle componenti  $\delta_x$  e  $\delta_y$  dello spostamento  $\delta$  secondo una coppia di assi cartesiani

c) *Rotazione provocata da una forza*

Sulla sezione  $A$  agisca ora una forza  $P$  avente una retta d'azione  $r$  qualsiasi la rotazione della sezione  $A$ , e di ogni punto collegato rigidamente con essa, avviene intorno all'antipolo  $C$  della  $r$ .

Per determinare l'angolo  $\varphi$ , trasportiamo la  $P$  parallelamente a sè stessa a passare per il centro elastico  $O$  ed aggiungiamo una coppia  $M = P d_r$ .

---

<sup>25</sup> Esso dipende evidentemente dalle caratteristiche geometriche (lunghezza, dimensioni delle sezioni rette) e fisiche (modulo di elasticità) della trave

La forza P passante per O produce una traslazione e nessuna rotazione;

La coppia M produce una rotazione data dalla (II-1)

$$\varphi = G P d_r \quad (II-4)$$

Noti il centro C e l'angolo  $\varphi$ , il movimento della sezione A è completamente determinato.

d) *Spostamento provocato da una forza*

Un punto generico a rigidamente collegato con la sezione A subisce uno spostamento  $\varphi$  normale alla congiungente  $Ca = d_a$  misurato dato dalla

$$\delta = \varphi d_a \quad (II-5)$$

o, sostituendo a  $\varphi$  il valore dato dalla (II-4), avremo:

$$\delta = G P d_r d_a \quad (II-5')$$

ovvie le componenti (o meglio le proiezioni dello spostamento  $\delta$  su due assi coordinati

### 3 2 Sintesi delle relazioni tra sollecitazioni e deformazioni

I quattro risultati precedenti sono dunque sintetizzati dalle relazioni.

$$\varphi = G M \quad (\text{II-1})$$

$$\varphi = G P d_r \quad (\text{II-4})$$

$$\delta = G M d_a \quad (\text{II-3'})$$

$$\delta = G P d_r d_a \quad (\text{II-5'})$$

Questi risultati consentono, tenuto conto delle relazioni di geometria proiettiva precedenti, di studiare quantitativamente le deformazioni

Essi tuttavia si prestano anche per una rapida indagine qualitativa del comportamento elastico della struttura (trave), costituiscono la parte più utilizzabile della teoria dell'ellisse di elasticità.

A differenza di altri metodi, la teoria dell'ellisse di elasticità consente di determinare direttamente le rotazioni e gli spostamenti in funzione delle forze esterne, cioè senza lo studio preventivo delle sollecitazioni interne.

### 3 3 I teoremi di Culmann

I quattro risultati suddetti si sintetizzano nei seguenti enunciati dei teoremi. dovuti a Culmann (in nota è la dimostrazione degli stessi dovuta a Ritter).

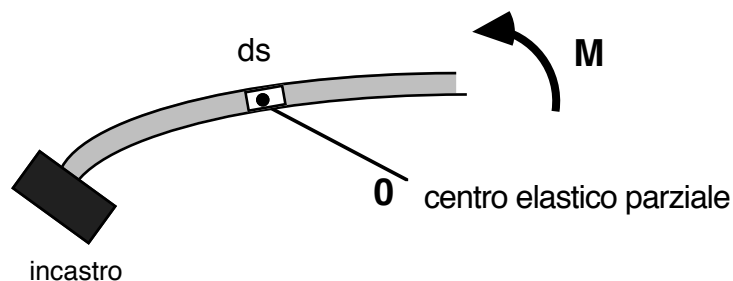
Allo scopo immaginiamo che il peso elastico  $G$  della trave, sia distribuito nella stessa come fosse un sistema di masse discretizzato, in maniera tale che la sua ellisse centrale d'inerzia coincida con l'ellisse di elasticità relativa alla sezione  $A^{26}$ .

---

<sup>26</sup> Esaminiamo il solo caso delle travi incastrate in B e libere in A.

La diffusione del peso elastico nella trave non è soltanto una funzione intesa a dare espressioni più sintetiche, ma è una realtà, poichè ciascun tronco  $ds$  o  $\Delta s$  della trave possiede effettivamente una particella  $dG$  o  $\Delta G$  ben definita del peso elastico  $G$  totale

Infatti, se si pensa che sia elastico soltanto un tronco  $ds$  e che tutto il resto della trave sia rigido, applicando una coppia  $M$  in A la parte fra B e  $ds$  non si muove, mentre per effetto della deformazione del tronco  $ds$  la parte fra  $ds$  e A subisce una rotazione  $d\varphi$  ben definita intorno al centro elastico parziale  $\bullet$  del tronco  $ds$



quindi:

$$dG = \frac{d\varphi}{M}$$

cioè dall'angolo  $d\varphi$  allorquando  $M=1$

Di due tronchi  $ds$  ha peso elastico maggiore quello che per azione dello stesso  $M$  contribuisce alla rotazione totale  $\varphi$  della sezione A con un angolo  $d\varphi$  maggiore.

La rotazione complessiva della sezione A risulta dalla deformazione di tutti i tronchi della trave, e l'angolo totale  $\varphi = M G$  è la somma degli angoli parziali  $d\varphi$ , cioè

$$\varphi = \sum(M dG) = M \cdot \sum dG$$

Quindi anche il peso elastico  $G$  è la somma dei  $dG$ . In questo caso, in cui le deformazioni dei vari tronchi si sommano per accrescere lo spostamento della sezione terminale, si dice che i pesi elastici parziali, e così pure i tronchi  $ds$ , sono disposti in serie.

La distribuzione del peso elastico  $G$  è dunque definita naturalmente; per cui o la coincidenza delle due ellissi sussiste spontanea, o non sussiste, nel qual caso non sarebbe lecito ammettere la coincidenza stessa.

Orbene, nel nostro caso tale coincidenza sussiste e si può riconoscere nel modo seguente.

- a) i centri delle due ellissi coincidono:

Infatti, il centro  $O$  dell'ellisse di elasticità è il centro della rotazione di A provocata da una coppia  $M$ ; quindi **come è noto** dalla cinematica, è il baricentro dei centri  $o$  delle rotazioni parziali caricate degli angoli  $d\varphi$ . Invece il centro  $G$  dell'ellisse d'inerzia dei pesi elastici è il baricentro dei baricentri parziali  $o$  dei vari tronchi caricate dei pesi elastici parziali  $dG$ . Ma gli angoli  $d\varphi = M dG$  sono proporzionali ai  $dG$  essendo  $M$  costante per tutti i tronchi; per cui i baricentri  $O$  e  $G$  coincidono.

Le due ellissi coincidono:

---

Infatti, una retta  $r$  generica del piano, considerata come retta d'azione di una forza  $P$ , ha per antipolo rispetto all'ellisse di elasticità il centro  $a$  di rotazione, ossia il baricentro delle rotazioni parziali  $d\varphi$  applicate nei centri parziali  $a$ . Considerata invece la  $r$  come semplice retta del piano, essa ha per antipolo rispetto all'ellisse d'inerzia dei pesi elastici il baricentro dei momenti statici  $dG$   $d_r$  rispetto a essa, applicati nei baricentri parziali  $C$ .

Magli angoli  $d\varphi = P dG d_r$  sono proporzionali ai momenti statici  $dG d_r$ , essendo  $P$  costante; per cui i due baricentri coincidono. Quindi avendo ogni retta del piano lo stesso antipolo rispetto a entrambe le ellissi, queste devono coincidere.

La coincidenza delle due ellissi, oltre a suggerire l'interpretazione sintetica di Culmann dei risultati consente soprattutto, in questo caso della trave a mensola, di sostituire la costruzione dell'ellisse di elasticità, con la costruzione di un'ellisse centrale d'inerzia, che si costruisce facilmente, quando sia nota la distribuzione dei pesi elastici dei vari tronchi e delle varie aste della trave.

La trave è vincolata in modo multiplo e  $A$  è una qualunque sezione intermedia, la distribuzione del peso elastico  $g$  nella trave è fittizia e convenzionale, e ha soltanto lo scopo di estendere ai risultati gli enunciati sintetici dei teoremi di Culmann. Infatti pensato elastico soltanto un tronco generico  $ds$  o  $\sim 8$  della trave, di solito la sezione  $A$  non può muoversi, qualunque sia la coppia o la forza che si applica in  $A$ ; per cui un tronco  $ds$  non possiede un peso elastico parziale.

In questo caso è dunque lecito immaginare il peso elastico sia distribuito in un modo qualsiasi, e quindi anche in modo che la sua ellisse d'inerzia coincida con quella di elasticità, che invece è ben definita.

L'unica utilità di questa coincidenza è quella suddetta, mentre invece l'ellisse di elasticità si deve costruire direttamente, mediante un opportuno studio elastico della trave.

Se si considerano separatamente due parti della trave collegate fra loro in  $A$  mediante un taglio praticato in  $A$ , i loro pesi elastici (che sono effettivi, perché ora le estremità sono liberate) si dicono disposti in parallelo nella trave data; e le parti stesso si dicono collegate in parallelo.

E' evidente la netta differenza di comportamento di una struttura costituita da due o più travi e di una struttura costituita da due o più travi collegate in parallelo).

Nel primo caso, la forza applicata in  $A$  agisce per intero su ciascuna trave. Inoltre, queste si deformano liberamente, come fossero indipendenti. Infine, le loro deformazioni si sommano, contribuendo tutte ad aumentare lo spostamento della sezione terminale  $A$ . Il peso elastico complessivo è la somma dei pesi elastici delle parti componenti la struttura.

Nel secondo caso, invece, la forza applicata nell'estremo  $A$  comune a tutte le travi si fraziona, ossia si decompone in più componenti e ciascuna di queste sollecita una delle travi, che perciò si deforma meno che nel caso precedente. Inoltre, le deformazioni delle varie travi non avvengono liberamente, ma si contrastano a vicenda, causa il vincolo mutuo esistente fra gli estremi  $A$ ; ciò che costituisce un motivo più importante di ulteriore diminuzione della deformazione della struttura. Di solito, il peso elastico complessivo è assai minore dei pesi elastici delle travi componenti la struttura.

In tal modo il centro elastico  $O$  è anche il baricentro  $G$  della distribuzione del peso elastico  $G = \sum \Delta G$ ; e l'antipolo  $C$  di una retta  $r$  è anche il baricentro dei momenti statici rispetto alla retta  $r$  delle particelle di peso elastico  $\Delta G$

Quindi i fattori:

$$G d_x = S_x \quad \text{che moltiplica } M$$

e

$$G d_r = S_r \quad \text{che moltiplica } P$$

rappresentano il momento statico del peso elastico rispetto alla retta  $x$  o alla retta  $r$

Mentre il fattore

$$G d_x d_r = J_{r,x} \quad \text{che moltiplica } P$$

rappresenta, il momento centrifugo del peso elastico rispetto alle rette  $r$

Interpretati come sopra i fattori della (II-1)...(II-5) i teoremi di Culmann si possono enunciare come segue:

- I La rotazione della sezione  $A$  e di ogni punto ad essa rigidamente collegato, provocata da una coppia  $M$  agente in  $A$ , è uguale al prodotto di  $M$  per il peso elastico dell'intera trave:

$$\varphi = G M \quad \text{(II-6)}$$

- II Lo spostamento, secondo una direzione  $r$ , provocato da una coppia  $M$  agente in  $A$ , di un punto  $a$  collegato rigidamente con la sezione  $A$ , è uguale al prodotto di  $M$  per il momento statico del peso elastico rispetto alla retta  $x$  passante per  $a$ :

$$\delta_x = M S_x \quad \text{(II-7)}$$

- III La rotazione della sezione  $A$  e di ogni punto collegato rigidamente con essa, provocata da una forza  $P$  agente in  $A$ , è uguale al prodotto di  $P$  per il momento statico del peso elastico rispetto alla retta  $r$  d'azione della forza:

$$\varphi = P d_r S_r \quad \text{(II-8)}$$

- IV Lo spostamento secondo una direzione  $x$ , provocato da una forza  $P$  di retta d'azione  $r$  agente in  $A$ , di un punto  $a$  collegato



rigidamente con la sezione A, , è uguale al prodotto di P per il momento centrifugo del peso elastico rispetto alle rette r e x:

$$\delta_x = P J_{r,x} \quad (II-9)$$

Nell'applicare il secondo, il terzo, o il quarto teorema non é possibile equivocare sulle rette rispetto alle quali si calcolano i momenti statici o quello centrifugo<sup>27</sup>.

#### 4 Considerazioni per la determinazione dell' ellisse di elasticità

Se la trave è a mensola ed a parete piena<sup>28</sup>, determinati i pesi elastici delle varie parti della trave (tronchi dG o ΔG e le ellissi parziali di elasticità dei vari tronchi, di solito non é necessario costruire l'ellisse totale di elasticità o d'inerzia dei pesi elastici, infatti é sufficiente calcolare i fattori:

$$S_x, S_r, J_{x,r}$$

che figurano nelle (II-7), (II-8) e (II-9) sommando i momenti statici ed i momenti centrifughi dei pesi elastici delle varie parti rispetto alle rette r e x

Le distanze dalle rette x, r che intervengono nel calcolo dei momenti  $S_x, S_r, J_{x,r}$  sia che si proceda sommando i momenti parziali dei vari pesi elastici, sia che si calcolino globalmente mediante le (II-7), (II-8) e (II-9) quando si conosce l'ellisse complessiva, ossia i punti G=O e C, sono sempre quelle normali.

Se il punto del quale si cerca lo spostamento è quello d'applicazione della forza P e se si vuole la componente dello spostamento nella stessa direzione della P (ossia  $s_{ex} = r$ ), il momento centrifugo  $J_{r,z}$  diventa il momento d'inerzia  $J_r$  rispetto alla retta comune della forza e dello spostamento.

Quindi lo spostamento del punto d'applicazione della forza P, valutato nella direzione della forza, è uguale al prodotto di P per il momento d'inerzia del peso elastico rispetto alla retta d'azione della forza:

$$\delta = P J_r \quad (II-10)$$

Se r passa per il centro elastico O la (II-5') diventa indeterminata, perchè si ha:

<sup>27</sup> infatti nel caso del secondo teorema è in giuoco soltanto la retta x secondo la quale si valuta lo spostamento; nel caso del terzo è in giuoco soltanto la retta r d'azione della forza; nel caso del quarto sono in giuoco le due rette r e x.

<sup>28</sup> Con piccole modifiche si trattano anche le strutture reticolari

$$d_r = 0$$

e

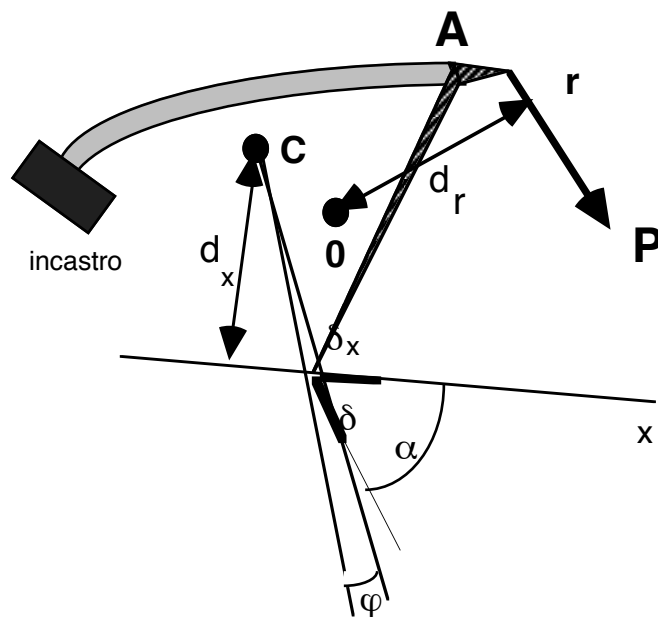
$$d_x = \infty$$

In tal caso si devono utilizzare invece le distanze finite (purchè anche  $x$  non passi per  $O$ ) cioè la distanza  $d_x$  di  $O$  da  $x$  e  $d'_x$  dell'antipolo di  $x$  da  $r$ .

Se  $r$  e  $x$  passano entrambi per il centro elastico  $O$ , si calcola  $J'_{x,r}$  rispetto a due rette  $r'$  e  $x'$  parallele a  $r$  e a  $x$ , poi si fa uso del teorema di trasposizione.

L'inconveniente non sussiste se invece si calcola  $J_{x,r}$  sommando i momenti dei pesi elastici parziali (potrebbe tuttavia capitare lo stesso caso singolare per una delle porzioni  $\Delta G$ ).

Nel caso della figura seguente, se si fa agire invece la forza  $P$  secondo la retta  $x$  e si calcola lo spostamento del punto al quale prima era applicata la  $P$ , secondo la direzione  $r$ , si ritrova lo stesso risultato, in virtù di  $J_{r,x} = J_{x,r}$ ; ciò che conferma ancora una volta, e per altra via, il teorema di Maxwell.



Per cui si ha

$$\delta_x = P J_{r,x} = P G d_r d'_x = P J_{x,r} = P G d_x d'_r \quad (II-11)$$

Nel caso della figura precedente se si fa agire invece una forza  $P=1$  secondo la retta  $x$  e si calcola la rotazione  $\varphi$ , essendo  $r = x$  e quindi  $S_r = S_x$

, il risultato è uguale allo spostamento  $\delta_x$  secondo la retta x provocato dalla coppia  $M = 1$ ; in armonia con l'estensione del teorema di Maxwell.

Il lavoro di deformazione nel caso di una coppia  $M$  e nel caso di una forza  $P$  si può esprimere rispettivamente con

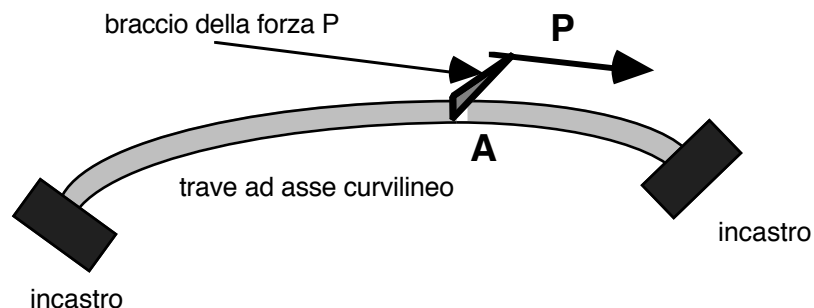
$$L = \frac{M \varphi}{2} = \frac{M^2 G}{2} = \frac{\varphi^2}{2 G} \quad (\text{II-12})$$

$$L = \frac{P \delta_r}{2} = \frac{P^2 J_r}{2} = \frac{\delta_r^2}{2 J_r} \quad (\text{II-13})$$

## 5 L'utilità della teoria dell'ellisse di elasticità

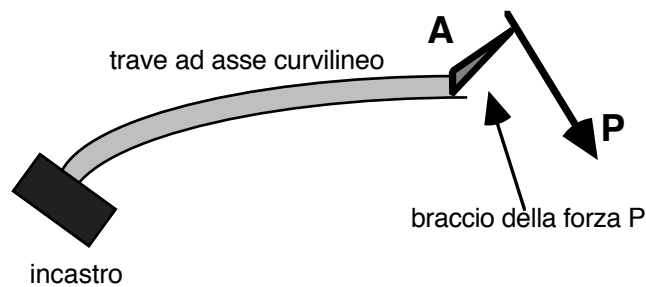
La determinazione dell'ellisse di elasticità di una trave rappresenta un lavoro preparatorio da fare una volta tanto, dopo di che essa serve per studiare in modo rapido e sintetico qualunque questione qualitativa o quantitativa riguardante la deformazione della trave.

Nel caso generale della figura seguente, pur dovendosi costruire l'ellisse di elasticità direttamente, tuttavia la sua determinazione si fa dipendere dallo studio di tre soli casi di deformazione, scelti inoltre fra i più semplici.



Per cui essa consente ugualmente una notevole economia di lavoro, prestandosi poi per lo studio della deformazione dovuta a qualsiasi forza (mentre invece lo studio diretto sarebbe diverso per ogni nuova forza considerata), nonché per utili indagini qualitative rapide e intuitive sul comportamento della trave.

Invece nel caso della figura seguente, la determinazione dell'ellisse non richiede nemmeno tale studio cinematico preliminare, ma è ricondotta alla costruzione di un'ellisse d'inerzia.



Inoltre si risparmia di solito anche questa costruzione, bastando conoscere le caratteristiche elastiche dei vari tronchi o delle varie aste .

L'ellisse di elasticità costituisce dunque un documento della trave che caratterizza e riassume le sue proprietà elastiche, il possesso del quale consente di studiare con risparmio di tempo e di fatica, e con la massima evidenza, la deformazione della trave provocata da qualsiasi forza agente sulla sezione A.

Per cui conoscere l'ellisse equivale ad aver risolto qualunque problema elastico, sia diretto che inverso.

## 6 Nuova formulazione dei teoremi di Culmann

Quando la trave è incastrata in B e la sezione A é quella terminale e libera, i teoremi di Culman, nonché la relazione geometrica fra le rette  $r$  e i centri  $C$ , si possono anche ottenere analizzando la deformazione dei vari tronchi della trave .

a) Rotazione provocata da una coppia.

Decomponiamo la trave in tronchi  $\Delta s$  abbastanza corti da potersi considerare prismatici.

Se in A agisce una coppia  $M$ , un tronco  $\Delta s$  si deforma in modo che una delle due sezioni estreme ruota, rispetto all'altra, intorno al punto di mezzo o dell'asse geometrico del tronco di un angolo  $\Delta\varphi$  proporzionale a  $M$ .

Quindi, indicando con  $\Delta G$  una costante di proporzionalità dipendente dalle caratteristiche del tronco e variabile in generale da tronco a tronco (peso elastico del tronco), si ha:

$$\Delta\varphi = M \Delta G \quad (\text{II-14})$$

Deformandosi l'intera trave, la rotazione della sezione A risulta pertanto

$$\varphi = \sum \Delta\varphi = \sum (M \Delta G) = M \sum \Delta G \quad (II-15)$$

e corrisponde al primo dei quattro teoremi.

Il centro di tale rotazione è il baricentro G dei centri o carichi degli angoli  $\Delta\varphi$ ; oppure, per la costanza di M, carichi dei pesi elastici  $\Delta G$ .

Ossia G è il baricentro dei pesi elastici  $\Delta G$ .

b) Spostamento provocato da una coppia.

Per effetto della deformazione del tronco  $\Delta s$ , un punto a collegato rigidamente con A subisce uno spostamento la cui componente secondo una direzione x vale:

$$\Delta\delta_x = \Delta\varphi d_x = M \Delta G d_x \quad (II-16)$$

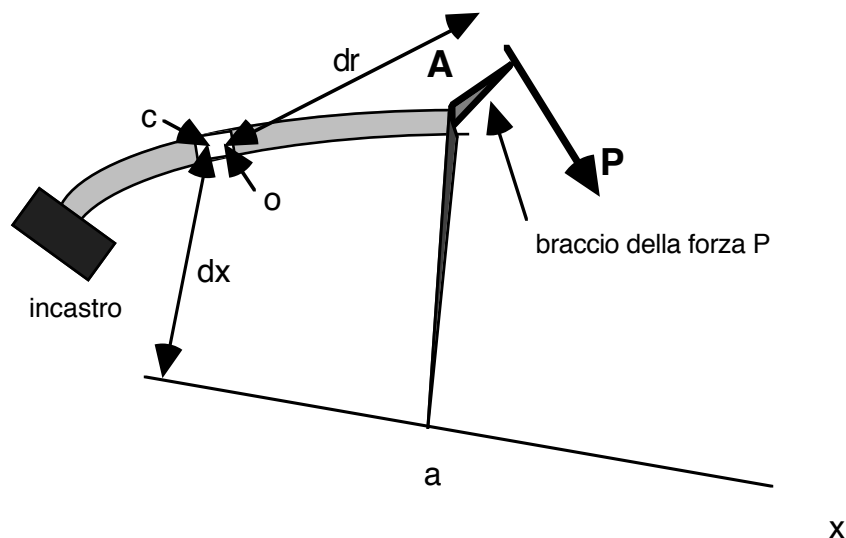
Quindi lo spostamento totale risulta

$$\delta_x = \sum \Delta\delta_x = \sum (M \Delta G d_x) = M \sum (\Delta G d_x) \quad (II-17)$$

e corrisponde al secondo teorema, poichè  $\sum (\Delta G d_x)$  è il momento statico dei pesi elastici rispetto a x.

c) Rotazione provocata da una forza.

Se in A agisce una forza P di retta d'azione r, il momento flettente medio nelle sezioni del tronco  $\Delta s$



vale

$$M = P d_r; \quad (II-18)$$

quindi la rotazione dovuta alla deformazione del tronco vale:

$$\Delta \varphi = M \Delta G = P d_r \Delta G \quad (II-19)$$

la rotazione totale risulta perciò:

$$\varphi = \sum \Delta \varphi = \sum (P d_r \Delta G) = P \sum (d_r \Delta G) \quad (II-20)$$

e corrisponde al terzo teorema, poichè  $d_r \Delta G$  è il momento statico dei pesi elastici  $\Delta G$  rispetto a  $r$ .

La rotazione è nulla se è nullo il momento statico, ossia se la forza passa per il baricentro elastico  $G$ .

Il centro della rotazione parziale è un punto  $c$  distinto da  $o$

Il centro della rotazione totale è il baricentro  $C$  dei centri  $c$  caricati degli angoli  $\Delta \varphi$ ; oppure, per la costanza di  $P$ , caricati dei momenti statici  $d_r \Delta G$  dei pesi elastici  $\Delta G$  rispetto a  $r$ . Quindi  $C$  è il baricentro dei momenti statici dei pesi elastici rispetto a  $r$ ; ossia l'antipolo di  $r$  rispetto all'ellisse centrale d'inerzia dei  $\Delta G$

d) Spostamento provocato da una forza

Per effetto della deformazione del tronco  $\Delta s$ , un punto  $a$  collegato rigidamente con  $A$  (vedasi sempre figura precedente) subisce uno spostamento la cui componente nella direzione  $x$  vale

$$\Delta \delta_x = \Delta \varphi d'_x = P d_r \Delta G d'_x \quad (II-21)$$

Quindi lo spostamento totale risulta:

$$\delta_x = \sum \Delta \delta_x = \sum (P d_r \Delta G d'_x) = P \sum (d_r \Delta G d'_x) \quad (II-22)$$

e corrisponde al quarto teorema, poichè  $d_r \Delta G d'_x$  è il momento centrifugo dei pesi elastici  $\Delta G$  rispetto a  $r$  ed a  $x$ .

Pertanto, l'analisi della deformazione della trave, risultante dalla deformazione di tutti i suoi tronchi  $\Delta s$ , conduce per via diretta a dimostrare i teoremi di Culmann ed inoltre a stabilire la relazione di alltipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia dei pesi elastici  $\Delta G$ , fra le rette  $r$  delle forze  $P$  agenti in  $A$  e i centri  $C$  di rotazione della  $A$ .

Tale ellisse d'inerzia si assume quindi come ellisse di elasticità, senza dover ammettere o dimostrare la coincidenza delle due ellissi<sup>29</sup>.

---

<sup>29</sup> Il sopra riportato procedimento e quello di Culman, valido in casi abbastanza particolari. quello cui al precedente paragrafo..... é invece dovuto a Ritter ed ha validità molto più generale.

**2 3            Travi a parete piena e caratteristiche elastiche di un tronco prismatico**

Supposto che la struttura sia, del tipo illustrato in figura:

- a parete piena,
- ad asse curvo (piccola curvatura)
- sezione variabile (gradualmente).