

Dispense di **COSTRUZIONI IDRAULICHE**

redatte dal
prof. Ing. Ignazio Mantica
17-10-1946 † 04-08-1995

il materiale presente in questo file viene riportato così come lasciato da Ignazio Mantica alla data della sua scomparsa, pertanto può risultare incompleto.

Questo materiale viene pubblicato nella speranza che il frutto di anni di lavoro svolto con passione ed impegno non vada perso e possa essere ancora utile a quanti lo vorranno.

Siete liberi di usare i testi e le immagini presenti in questo documento come meglio credete, vi chiediamo soltanto di citarne la fonte.

- GRAZIE -

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ANCONA
Istituto di IDRAULICA

prof.ing. Ignazio MANTICA

INGEGNERIA DELLE
ACQUE SOTTERRANEE

Con asterisco sono indicati i capitoli ed i paragrafi
che non sono stati trattati nella presente stesura

Dispense per il Corso di Ingegneria Sanitaria ed Ambientale 1993/94

INDICE

PARTE I.....		5
	IL PROBLEMA FISICO-MATEMATICO	5
1	Premesse.....	6
2	L'acqua nel sottosuolo.....	8
3	Richiami d'Idraulica	16
4	Considerazioni circa l' equazione del moto.....	17
5	Il mezzo poroso, aspetto fisico.....	24
6	La legge di Darcy.....	29
7	L'equazione di continuità e l'equazione di stato	32
8	L'idraulica delle acque filtranti in mezzi porosi saturi.....	35
8.1	Il caso del moto permanente.....	36
8.2	Il caso del moto non permanente.....	39
9	Generalizzazione delle leggi precedenti.	41
10	Il problema piano delle acque filtranti nei mezzi porosi.....	45
10.1	Alcune precisazioni sul problema piano nel caso di moto permanente e mezzo omogeneo.....	48
10.2	Circa la soluzione matematica del problema piano	51
10.3	Le condizioni al contorno.....	52
11	Interpretazione della equazione indefinita del moto di filtrazione in mezzo poroso bidimensionale tramite le funzioni analitiche.....	55
12	L'integrazione delle equazioni indefinite delle acque sotterranee.....	62
12.1	L'integrazione analitica delle equazioni indefinite delle acque sotterranee.....	63
12.1.1	Idraulica delle sorgenti.....	63
12.1.2	I pozzi e le trincee	72
12.1.2.1	Il pozzo artesiano singolo in regime permanente.....	72
12.1.2.2	Il pozzo freatico singolo in regime permanente.....	78
12.1.2.3	Il pozzo artesiano singolo in regime non permanente.....	79
12.1.2.4	Il pozzo freatico singolo in regime non permanente.....	84
12.1.2.5	Le trincee	85
12.1.2.6	Altre soluzioni.....	87
12.2	L'integrazione delle equazioni indefinite in termini numerici.....	88
12.2.1	La discretizzazione alle differenze finite.....	88
12.2.2	Le condizioni al contorno, in termini di differenze finite.	90
12.2.3	Sintesi matriciale.....	93
12.3	La soluzione tramite il metodo delle trasformate conformi.....	95
12.3.1	Alcune soluzioni note.....	97
12.3.2	Le trasformazioni più usuali.....	99
12.3.3	Esempio di utilizzo delle trasformate conformi.	102
12.4	La soluzione tramite metodi grafici	105
12.5	La soluzione tramite metodi analogici, l'analogia reoelettrica, l'analogia elettrostatica, l'analogia termica.	106
13	L'Idraulica nei mezzi porosi non saturi*	107
PARTE II.....		108
	GLI ALGORITMI USUALI NEI PROBLEMI DELLE ACQUE SOTTERRANEE.....	108
1.2.1.2	I gruppi di pozzi*	109

1.2.1.2.1	I pozzi sparsi, idraulica*	109
1.2.1.2.2	I pozzi sparsi, il teorema di reciprocità*	109
1.2.1.2.3	I pozzi allineati*	109
1.2.1.3	Considerazioni sul raggio d'azione del pozzo singolo	109
1.2.1.4	Considerazioni circa il pozzo singolo in acquifero in moto stazionario.....	111
1.2.2	I pozzi artesiani in regime non permanente	111
1.2.3	Idraulica dei pozzi con drenaggio orizzontale.....	111
1.2.4	I pozzi freatici in regime permanente.....	112
1.2.4.1	Il pozzo singolo	112
1.2.5	Idraulica delle trincee.	112
1.3.	Le misure di permeabilità e le prove di portata	113
1.3.1	Prove di laboratorio.....	113
1.3.2	Prove in situ.....	115
1.3.2.1	Misure di tipo puntuale.....	115
1.3.2.1.1	Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianiana in regime permanente.....	116
1.3.2.1.2	Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianiana in regime di risalita.....	119
1.3.2.1.3	Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianiana in regime di emungimento non permanente e relativa risalita.....	122
1.3.2.2	Misure di tipo puntuale.....	126
1.3.2.1	Caso di più pozzi o di un pozzo con uno o più piezometri.....	126
1.3.2.2	Caso di più pozzi o di un pozzo con uno o più piezometri, esempio numerico.....	130
1.4.	Gli aggotamenti.....	131
1.5.	I drenaggi*	134
1.6.	La filtrazione attraverso argini e dighe*	134
1.7.	L'interferenza con altre opere nel sottosuolo	134
1.8	Paratie e sbarramenti sotterranei.....	134
1.9	Discariche.....	134
PARTE III		135
GLI ASPETTI COSTRUTTIVI DELLE OPERE DI CAPTAZIONE.....		135
2.1.	Le opere di captazione.....	136
2.1.1	Le Sorgenti	136
2.1.2	I pozzi e le trincee	136
2.2.	Gli scavi e gli aggotamenti.	136
2.2.1	Paratie.....	138
2.2.2	Metodo Kajma.....	141
2.2.3	Iniezioni di cemento.....	142
2.2.4	Pancolate.....	142
2.3.	I drenaggi.....	143
PARTE III I MODELLI MATEMATICI.....		144
1.	Il modello bidimensionale alle differenze finite sul piano orizzontale*	144
2.	Il problema diretto*	144
3.	I problemi inversi*.....	144
3.1	Il problema inverso banale*	144
3.2	Il problema inverso di identificazione*	144
4.	Il modello tridimensionale*	144
5.	Modelli bidimensionali su piani verticali*.....	147

6	Un caso di studio affrontato e con modello bidimensionale e con modello tridimensionale, confronto*	150
6.	Cenni al metodo degli elementi finiti*	153
PARTE IV		154
	GLI ASPETTI IDRAULICI DELLE OPERE NEL SOTTOSUOLO IN PRESENZA DI ACQUE SOTTERRANEE.....	154
APPENDICE II.....		155
Tabelle e valori caratteristici		155
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....		156

PARTE I

IL PROBLEMA FISICO-MATEMATICO

1 **Premesse**

Sino a non molti anni or sono lo studio delle acque sotterranee nelle Facoltà di Ingegneria era limitato a pochi cenni nell' ambito del corso d'Idraulica ed ad altri cenni allorquando, in Costruzioni Idrauliche, si affrontavano i problemi di approvvigionamento idrico o in Geotecnica i problemi connessi alle pressioni interstiziali e poco più.

Neppure con l'introduzione dei corsi di Idrologia, avvenuta negli anni "60, lo studio delle acque sotterranee ha avuto lo sviluppo che meritava.

Occorre giungere agli anni "70 con i primi corsi di Idrogeologia presso le Facoltà di Ingegneria, tra queste una delle prime ad annoverare tra gli insegnamenti appunto l'Idrogeologia fu la Facoltà di Ancona.

In precedenza lo studio della circolazione idrica sotterranee era quasi esclusiva competenza dei geologi.

Tuttavia approcci ingegneristico-matematici ai problemi della filtrazione, che andassero oltre quelli estremamente modesti dell' ingegneria civile degli anni "60 erano affrontati ed utilizzati dagli ingegneri minerari ed in particolare di chi studiava i giacimenti petroliferi con i quali le acque sotterranee possono essere per certi versi assimilati.

Tra i primi in Italia ad occuparsi di acque sotterranee dal punto di vista Ingegneristico sono i ricercatori dell' Idraulica Agraria di Milano, con in primis Giura e De Wrachien, il prof. Gambolati prima presso il centro Scientifico IBM di Venezia e poi come professore di Analisi numerica presso l'Università di Padova, il prof. Troisi, prima presso l'Area di ricerca di Bari del C.N.R. e poi presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università della Calabria, il prof. Galligani dell'Istituto Applicazione Calcolo di Roma e poi dell' Università di Bologna ed infine Ribighini e Mantica dell' Università di Ancona.

Una citazione a parte, per l'importanza del contributo, è dovuta al prof. Maione e quindi ai ricercatori del Laboratorio di Analisi Numerica dell' Università di Pavia (Magenes, Baiocchi, Pozzi, Commencini ecc...) che primi in assoluto hanno affrontato per via rigorosa e parzialmente risolto i problemi di frontiera libera (con la

dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione per quanto riguarda il così detto "problema della diga").

Oggi in Italia il gruppo degli studiosi, dal punto di vista dell' Ingegnere dei problemi delle acque sotterranee è molto più ampio di quello appena sopra indicato, esso è coordinato dal prof. Troisi e fa capo dal punto di vista logistico al Centro Internazionale di Idrologia dell' Università di Padova che a sede a Monselice.

Di tale gruppo fanno parte oltre ai ricercatori sopra ricordati anche molti altri provenienti da quasi tutte le Facoltà d'Ingegneria d' Italia.

Ma i precedenti richiami all'approccio ingegneristico alle problematiche delle acque sotterranee non debbono far pensare ad una rivendicazione da parte degli Ingegneri circa la esclusiva loro competenza nel settore.

Il geologo ed il suo approccio sono fondamentali e complementari.

Dovrà essere il geologo ad individuare la presenza di acquiferi, a studiarne la tipologia fisica, la loro estensione e potenza e quindi la loro geometria.

All' uopo sono necessarie indagini che vanno dal tradizionale rilievo geologico, basato sugli affioramenti, sulle conoscenze della evoluzione geologica della zona, sui rapporti tra l'acquifero in esame e le formazioni che lo confinano, su esplorazioni eseguite vuoi tramite sondaggi meccanici che geofisici (elettrici, sismici, ..), sulla interpretazione di immagini da satellite od aeree (remote sensing)

Esiste poi un campo, di possibile sovrapposizione, meglio sarebbe di collaborazione e ciò al fine che dall' intersezione di due culture e formazioni diverse sorga una migliore conoscenza, che comprende le prove di emungimento, le misure di portata, di permeabilità in situ ed in laboratorio, lo studio con i traccianti, la redazione e l'interpretazione di carte ad isovalori (isofreatiche ed isopieze, isoconduttività, isoalcalinità, iso-cloruri, iso-pH ecc...)

Solo avendo a disposizione e con la precisione più affinata possibile i dati fisico-geometrici di cui sopra nonché ove occorranò i dati relativi ai rapporti tra acque sotterranee ed idrologia superficiale, infiltrazione ecc... saranno possibili elaborazioni e progettazioni che in qualche modo o prevedano l'utilizzo e la gestione degli acquiferi sotterranei o comunque la realizzazione di opere nel sottosuolo che possono interferire (a volte permanentemente a volte solo durante l'esecuzione dei lavori) con le stesse.

2 L'acqua nel sottosuolo

I terreni che costituiscono la superficie ed il sottosuolo terrestre (almeno quel tratto di esso di interesse pratico) si possono classificare in via estremamente semplificativa in :

- permeabili
- impermeabili

È ovvio che la permeabilità nel nostro caso va riferita all' acqua. Ma ovviamente terreni permeabili all' acqua lo sono anche alle sostanze gassose e quindi all' aria ed a molte altre sostanze liquide.

L'acqua meteorica, una volta precipitata come è noto in parte defluisce sul terreno per via esclusivamente superficiale, in parte ristagna su di esso o sulla vegetazione e poi a seconda dei casi può evaporare o seguire altre vie (per esempio dalla vegetazione precipitare sul terreno).

Una parte, se il terreno è permeabile può penetrare in esso: abbiamo il fenomeno dell' infiltrazione.

Questo è il fenomeno principale di alimentazione acquifera del sottosuolo terrestre, molto più modesto e di alcuna utilità pratica è il fenomeno delle così dette *aquae iuvelilis* cioè di acque del sottosuolo formatisi a grandi profondità in opportune condizioni di temperatura e pressione da reazioni chimiche.

Riscontriamo tra diversi ed importanti tipi di terreni permeabili:

- i terreni permeabili per porosità;
- i terreni permeabili per fratturazione
- i terreni permeabili per carsismo.

Di norma l'attenzione si concentra sui se non altro perché sono i più facili da studiarli. Ma grande importanza hanno anche gli altri.

In questa sede, *ingegneristica*, ci si sofferma su tali aspetti solo in maniera marginale rinviando chi voglia approfondire l'argomento a seguire il corso di Idrogeologia applicata o quanto meno alla consultazione della letteratura specifica.

Gli acquiferi porosi sono in genere terreni sciolti, molte volte, almeno sul versante adriatico dove non esistono formazioni di origine vulcanica, costituiti o da detriti o da depositi alluvionali soprattutto gli strati di questi dove vi è presenza di sedimenti di granulometria riconducibile alle sabbie ed alle ghiaie.

Pertanto in generale i fondo valle dell' adriatico sono sede di acquiferi porosi derivanti dalla deposizione in ambiente marino (ora sollevato) delle alluvioni dei paleofiumi preesistenti agli attuali.

E' evidente che tra un granello e l'altro di materiale solido anche se questi solo granulometricamente ben assortiti si saranno dei canalicoli, tra di loro comunicanti.

Un altro caso molto diffuso, sebbene meno importante, è quello dei detriti di falda¹, e, ma non certo alle nostre latitudini, dei depositi morenici.

Tale struttura di alternanza di canalicoli e grani solidi è estremamente diffusa tanto che può considerarsi, se non dal punto di vista matematico² ma da quello fisico, omogenea.

L'acqua che vi permea si muove in essi canalicoli con moto sostanzialmente³ regolato da leggi gravitative e pertanto tende ad approfondirsi compatibilmente con la presenza dei meati e della circolazione che già si è instaurata.

1 Di norma sorgenti ai piedi di detriti di falda sono solo in parte dovuti alla circolazione di acque meteoriche o comunque superficiali, infiltratesi nei detriti stessi ma anche alla immissione nei detriti di acque provenienti dalla rocce fratturate su cui essi si poggiano.

2 Vedremo meglio nel seguito ed in termini matematici questo concetto.

3 In vero se i canalicoli fossero estremamente piccoli, possono interferire con le leggi gravitative le leggi della capillarità o, in casi particolari, terreni argillosi, anche leggi che tengono conto delle cariche elettriche delle varie particelle a contatto.

A monte cioè a partire da una linea pressoché parallela alla linea di costa e distante da essa circa 35÷40 Km troviamo le rocce carbonatiche, sono queste, almeno nelle nostre condizioni geologiche regionali ad essere sede di acquiferi permeabili per fratturazione e/o per carsismo.

La fratturazione derivante dai movimenti tettonici ha prodotto nelle rocce vie preferenziali per l'acqua che vi permea spesso per azione meccanica e termica le allarga.

E' evidente che in tali fratture spesso tra loro interscandenti si instaura una vera e propria circolazione idrica che è regolata pressoché esclusivamente da leggi gravitative.

Sovente gli acquiferi porosi, a valle sono alimentanti da acquiferi carsici a monte.

Ma nelle rocce carbonatiche vi possono essere vie d'acqua in generale molto più grossolane di quelle della porosità o della fratturazione che sono le cavità, le caverne ecc...derivanti dall' azione disgregatrice per via chimica dell' acqua.

L'esempio più prossimo di tali caverne è quello delle grotte di Frasassi, nei pressi di Genga, ma il fenomeno è molto più diffuso.

Una importante circolazione sotterranea di tale tipo è quella che trae origine dai due bacini endoreici di piano delle cinque miglia e dell'altopiano di Roccaraso, Pescocostanzo che alimenta dopo un percorso sotterraneo di diversi chilometri importanti sorgenti quali quelle del Gizio, del Verde, ecc....

É evidente che in altre realtà geologiche (cioè non necessariamente nel carbonatico) possiamo avere rocce fratturate e quindi permeabili come pure avremo terreni porosi ad esempio nei depositi di ceneri vulcaniche, ma mi preme soffermarmi maggiormente sulla realtà locale.

Purtroppo lo studio della geometria (sotterranea) degli acquiferi, che si ribadisce, è compito del geologo non è mai facile ma mentre è in qualche modo possibile per quel che riguarda il mezzo poroso dove tale conoscenza si riconduce alla macro-geometria del complesso, cioè alle sue dimensioni generali mentre non è necessario, come vedremo nel seguito (e d'altro canto sarebbe impossibile), la conoscenza della geometria dei singoli canalicoli dove si muove l'acqua.

L'acqua circolante nel mezzo poroso, specie se in pianure alluvionali è detta falda, essa ha sostanzialmente un moto bidimensionale infatti la formazione geologica lungo cui essa si muove ha, per sua costituzione lo spessore dell'ordine di qualche decina di metri e dimensioni planimetriche dell'ordine dei chilometri.

Il termine falda è poi abusato per indicare più in generale una circolazione idrica sotterranea.

Si suole distinguere tra:

- falde artesiane

e

- falde freatiche

Con falde freatica⁴ si intende una circolazione idrica nel sottosuolo con contatto tra superficie superiore dell'acqua ed aria circolante nel sottosuolo a sua volta a contatto con l'atmosfera.

Pertanto in tali casi la superficie superiore della falda, o frontiera superiore della falda) è a pressione atmosferica e può oscillare in alto od in basso in funzione delle condizioni di alimentazione o di emungimento ma liberamente senza ostacoli di carattere geologico.

Si parla in tali casi anche di acquiferi a frontiera libera o non confinati.

Può verificarsi una tale situazione per il più superficiale degli acquiferi di una pianura alluvionale, ma anche per acquiferi nel carbonatico non coperti da terreni impermeabili.

La figura che segue schematizza un tale tipo di acquifero delle alluvioni.

⁴ Tali acquiferi sono detti freatici perché la superficie piezometrica coincide con il pelo libero, il termine deriva dal greco φρῶνισμα εἶδος-ατος e significa pozzo, quindi l'affettivo freatico è inteso come superficie dell'acqua nei pozzi e quindi a pressione atmosferica

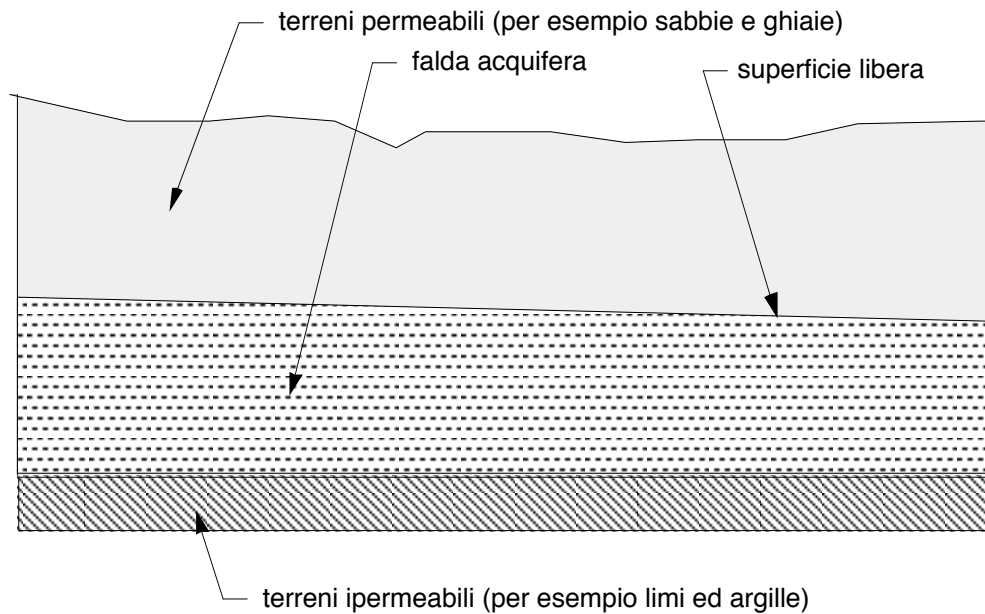


fig. 1- schema di falda freatica

Ma oltre che per il caso di cui alla precedente figura, cioè dove a partire dal pelo libero della falda sino alla superficie topografica vi sono tutti terreni permeabili e quindi con comunicazione diretta tra aria nel terreno ed aria atmosferica, può verificarsi anche la situazione rappresentata in figura che segue.

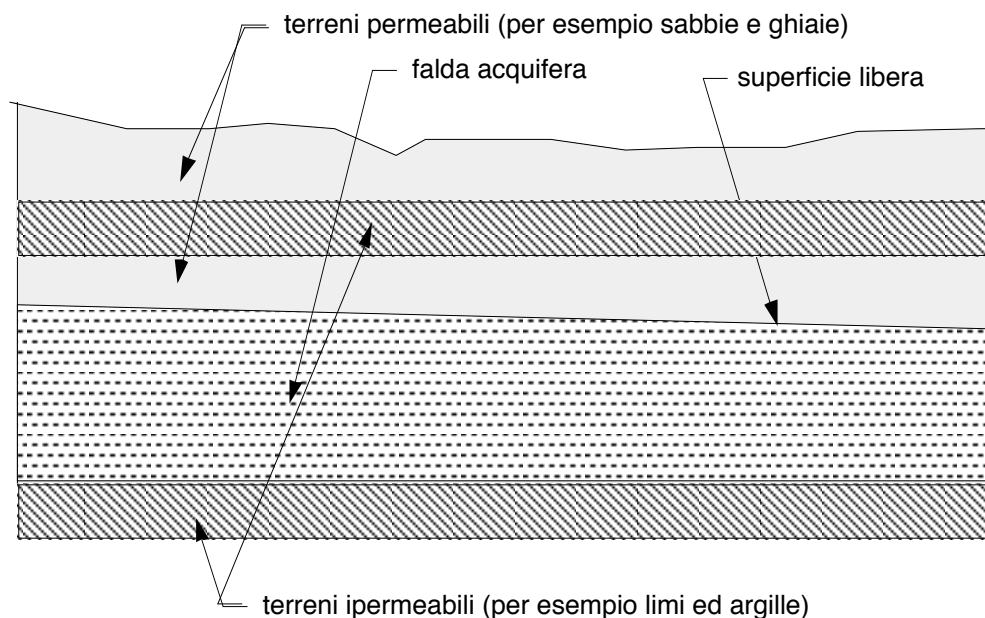


fig. 2- schema di falda freatica

dove al di sopra della superficie libera è una copertura impermeabile, ma dove, comunque esiste una circolazione di aria tra superficie della falda e strato impermeabile sovrastante.

Si parla invece di falde artesiane⁵ quando le acque sotterranee scorrono tra due strati impermeabili in assenza di aria, cioè gli strati impermeabili *confinano* l'acqua.

Da qui anche il termine di acquiferi confinati. Non essendovi in tali casi presenza di aria a pressione atmosferica, la pressione in qualsivoglia punto dell' acqua e soprattutto la dove è a contatto con lo strato impermeabile che la confina superiormente è maggiore della pressione atmosferica e pertanto si parla di acquiferi in pressione.

La figura che segue illustra un semplice caso di acquifero in pressione, sempre nel caso di pianura alluvionale.

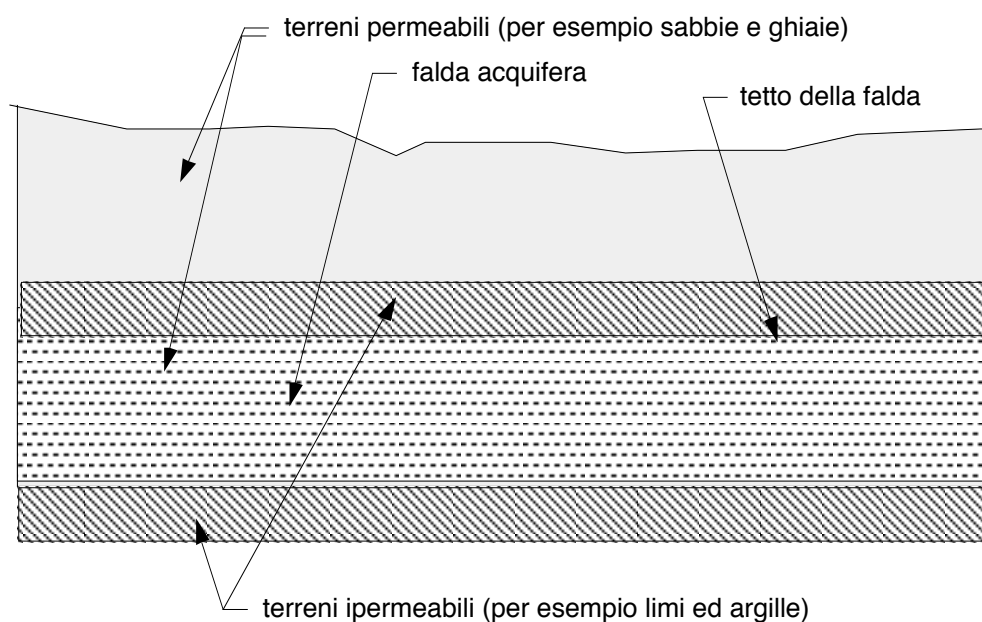


fig. 3- schema di falda artesianica

Lungo una stessa verticale, in generale, potremmo avere un solo acquifero freatico e più acquiferi artesiani,.

⁵ Il termine artesianico è l'italianizzazione del francese artésien cioè dell' Atrous località della Francia dove furono terebrati (scavati) per la prima volta pozzi in tale falde dai quali l'acqua essendo, nella falda, in pressione zampillava all' esterno senza ausilio di pompe od altro.

La figura che segue illustra una possibile situazione di circolazione idrogeologica nel sottosuolo.

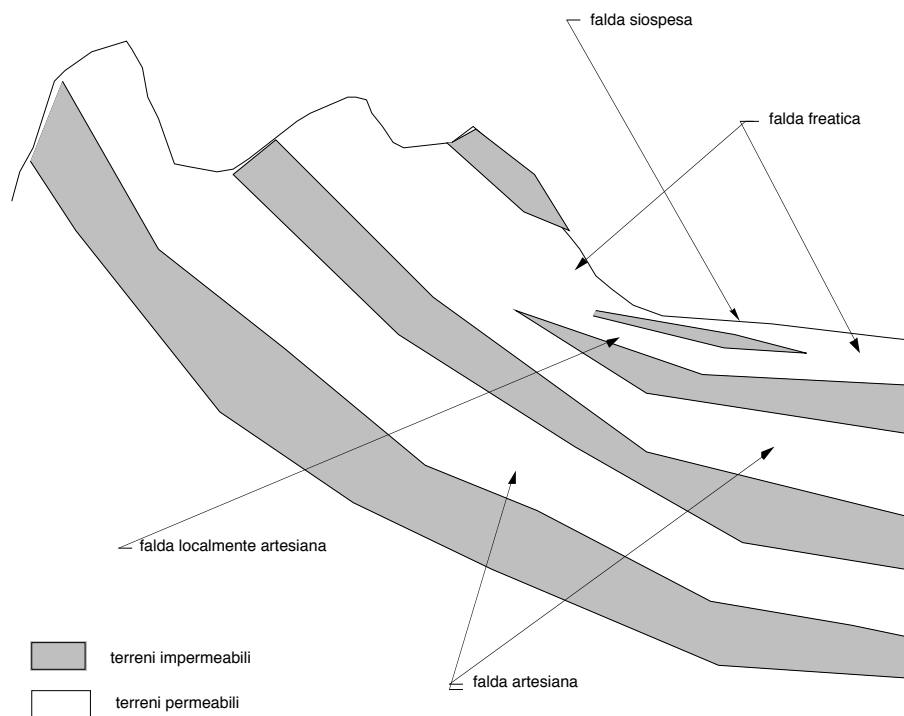


fig. 4- Sezione schematica di una complessa circolazione idrica sotterranea

Dalla figura che precede, che seppur mostra una complessa situazione di falde artesiane e freatiche è tuttavia ancora abbastanza semplice rispetto alle situazioni reali, è evidente la necessità che l'approccio matematico-ingegneristico sia preceduto dall'approccio geologico cui compete individuare le situazioni geometriche cui dianzi.

Sempre dalla figura precedente è altresì evidente come non necessariamente i bacini idrografici cioè gli spartiacque relativi ai deflussi superficiali coincidano con gli spartiacque sotterranee.

Le acque sotterranee possono drenare acqua da un bacino e trasferirle in un altro dove possono rimanere nel sottosuolo o manifestarsi come sorgenti o come manifestazioni subalvee.

Un'altro concetto fondamentale, preliminare ad ogni trattazione matematica è il distinguere tra acquifero saturo ed insaturo. Un acquifero si dice *saturo* quando gli spazi non occupati da grani di materiale solido (roccia, sia essa scilta che compatta) è occupata da acqua.

Nel caso opposto dicesi insaturo.

Pertanto le falde artesiane sono sempre acquiferi saturi, mentre l'insaturo è presente tra la superficie libera delle falde artesiane e la superficie topografica, dove si manifesta il fenomeno della infiltrazione.

3 Richiami d'Idraulica

Sotto condizioni molto generali, per i liquidi viscosi **le equazioni del moto** assumono la forma vettoriale⁶.

$$\rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1)$$

che presenta cinque incognite (le tre componenti del vettore velocità, la densità ρ e la pressione p) per rendere determinato il problema essa deve essere associata ad altre due equazioni: **equazioni di continuità** (che come è noto esprime il principio di conservazione della massa) e che, sempre in forma molto generale, si esprime - per i liquidi - con la :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

e **l'equazione di stato**, che lega tra loro pressione p e densità e la cui espressione, per i liquidi, ammesso che il processo sia sempre isotermico, è:

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p - p_0}{\epsilon}} \quad (3)$$

e che spesso viene approssimata dal solo primo termine del suo sviluppo in serie:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{\epsilon} \right) \quad (3')$$

Nelle (3') ϵ è il modulo di elasticità dell'acqua.

⁶ La (1) andrebbe completata al secondo membro con l'addendo

$$- \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \mathbf{V}$$

che si annulla se si ammette ρ dipendente solo da t e non da x,y,z cosa che noi faremo nel seguito.

4 Considerazioni circa l' equazione del moto

Se indichiamo con:

$$X = \mu \nabla^2 v_x$$

$$Y = \mu \nabla^2 v_y$$

$$Z = \mu \nabla^2 v_z$$

potremo scrivere la (1) nella forma

$$\begin{aligned} \rho \left(F_x - \frac{dv_x}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} - X \\ \rho \left(F_y - \frac{dv_y}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} - Y \\ \rho \left(F_z - \frac{dv_z}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} - Z \end{aligned} \quad (1')$$

Introduciamo ora l' ipotesi che il fluido (o meglio il liquido - data la prima ipotesi) **sia sottoposto alla sola forza peso**, segue che:

$$F = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (4)$$

dove con x, y, z si sono indicate le coordinate su di una terna cartesiana ortogonale comunque orientata; h invece indica l'altezza della generica particella liquida misurata a partire da un piano orizzontale di riferimento.

Sostituendo ora la (4) nella (1) avremo⁷:

⁷ Dalla (1) equazione di Navier:

$$\rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_x}{dt} + \mu \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_y}{dt} + \mu \nabla^2 v_y \\ \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_z}{dt} + \mu \nabla^2 v_z\end{aligned}\quad (5)$$

Potremmo pure sostituire la (4) nella (1') ed in tal caso:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_x}{dt} + X \\ \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_y}{dt} + Y \\ \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) &= -\rho \frac{dv_z}{dt} + Z\end{aligned}\quad (6)$$

Le (5) possono essere vantaggiosamente scritte in forma adimensionale introducendo i seguenti rapporti:

sostituendo la (4) avremo:

$$\rho \left(\mathbf{g} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \right) - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

donde

$$\rho \mathbf{g} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \right) + \text{grad } p = -\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

ed infine

$$\gamma \text{grad } h + \text{grad } p = -\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

da cui

$$\text{grad } (\gamma h + p) = -\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

donde la (5).

$$x' = \frac{x}{L} \quad y' = \frac{y}{L} \quad z' = \frac{z}{L} \quad h' = \frac{h}{L}$$

$$v'_x = \frac{v_x}{v_0} \quad v'_y = \frac{v_y}{v_0} \quad v'_z = \frac{v_z}{v_0}$$

$$t' = \frac{t}{\frac{L}{v_0}} \quad p' = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

In tal modo la prima delle (5) diventa:

$$\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{g^2}{v_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = - \frac{\partial v'_x}{\partial t'} - \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) + \frac{\mu}{\rho L v_0} \nabla^2 v'_x \quad (7)$$

ed analogamente le altre due.

Introducendo ora i parametri adimensionali:

$R =$ **numero di Reynolds**, definito dalla:

$$R = \frac{\rho L v_0}{\mu}$$

che rappresenta il rapporto tra **forze d'attrito e forze d'inerzia**;

$F =$ **numero di Froude**, definito dalla:

$$F = \frac{v_0^2}{gL}$$

che rappresenta il rapporto tra **forze di gravità e forze d'inerzia**.

La (7) può essere ora scritta nella forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = - \frac{\partial v'_x}{\partial t'} - \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) + \frac{1}{R} \nabla^2 v'_x \quad (8)$$

ed analogamente le altre due.

La (8) mette in evidenza il "gioco" del numero di Reynolds; possiamo distinguere, tra gli altri due casi limite:

a) $R \rightarrow \infty$

b) $R \rightarrow 0$

Esaminandoli unitamente ad un particolare caso intermedio:

Nel caso a) l'ultimo termine della (8) cioè quello funzione di R tende a zero e quindi l'equazione del moto sarà indipendente dal numero di Reynolds. Questo caso è quello che meno interessa chi si occupa del moto delle acque in acquiferi porosi.

Nel caso b) invece ($R \rightarrow 0$) l'ultimo termine della (8) tende a diventare sovrachiarante nei confronti del primo termine (sempre del secondo membro) che può addirittura essere ritenuto nullo, cioè le (5) possono essere ridotte alla:

$$\frac{\partial(p+\gamma h)}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

ed alle analoghe in y e z.

Le (9) sono le equazioni che governano il "**moto regolare dei fluidi viscosi**" detto anche "**creeping flows**" caratterizzati dallo scorrimento lento, durante le deformazioni di strati ideali animati da diversa velocità nei cui contatto si esplicano sforzi tangenziali d'attrito secondo la legge di Newton

$$\tau = \mu \frac{dV}{dn}$$

Tra le due precedenti categorie di movimenti, corrispondenti ai suddetti estremi valori di R esistono situazioni intermedie, di nostro particolare interesse è la classe dei moti laminari che è costituita dai moti rettilinei unidirezionali di strati in forma laminare entro un condotto di sezione costante.

Sotto queste ipotesi le componenti della velocità sono nulle, eccetto la componente nella direzione del moto la quale è a sua volta costante in questa direzione (per il carattere uniforme del moto).

Segue che tutti i termini d'inerzia sono nulli.

Con riferimento a questo particolare tipo di moto si assume un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'asse delle x orientato come l'asse del condotto, segue che la direzione di V coincide con quella dell'asse delle x e quindi:

$$|\mathbf{V}| = V_x$$

e

$$V_y = V_z = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

le (5) pertanto, tenendo conto che abbiamo ammesso un moto uniforme, diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

cioè:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h)$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) = 0 \quad (11)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) = 0$$

e quindi le resistenze viscosse sono proporzionali alla cadente piezometrica, notoriamente definita dalla:

$$J = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (12)$$

Una delle più semplici soluzioni della (10) è la:

$$V_x = - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \quad (13)$$

che implica che nel condotto la velocità del liquido sia nulla a contatto con le sue pareti e massima al centro e con valore pari a:

$$V_x = -\frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \quad (14)$$

La velocità media sarà:

$$V = -\frac{r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \quad (15)$$

cioè la nota formula di Poiseuille.

Dividendo e moltiplicando la (13) per γ avremo:

$$V = -\frac{r^2 \gamma}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (15')$$

che confrontata con la (12) porta alla:

$$V = \frac{r^2 \gamma}{8\mu} J \quad (16)$$

Posto:

$$C = \frac{r^2 \gamma}{8\mu} \quad (17)$$

che verrà detta conduttanza, la (15) diventa:

$$V = C J \quad (18)$$

cioè la (*) del § 3.

Dalla (17) è evidente che C dipende:

- dalla forma e dimensioni del canalicoli dove ha sede il moto;
- dal peso specifico del liquido;
- dalla viscosità del liquido.

Generalizzando la (15) per un sistema di assi comunque orientato, avremo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_x &= - \frac{r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \\ \mathbf{V}_y &= - \frac{r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \\ \mathbf{V}_z &= - \frac{r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \end{aligned} \quad (19)$$

o, che è lo stesso:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_x &= - C \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ \mathbf{V}_y &= - C \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ \mathbf{V}_z &= - C \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (19')$$

e, in termini vettoriali, tenuto conto che:

$$H = h + \frac{p}{\gamma}$$

avremo:

$$\mathbf{V} = - C \text{ grad}(H) \quad (19'')$$

Sino ad ora non abbiamo tenuto conto del particolare mezzo nel quale ci proponiamo di operare e le conclusioni sin qui tratte (13), (14), (15) (16) (19') e (19'') hanno validità per il moto dei liquidi in qualunque condotta purchè esso sia di tipo laminare.

5 Il mezzo poroso, aspetto fisico.

Un mezzo poroso è costituito da una massa in cui tra gli elementi di materiale solido esistono dei pori che possono essere occupati da liquidi o da aeriformi.

La parte solida dei terreni porosi è in genere costituita da grani.

Senza entrare nel merito delle caratteristiche geologiche e litologiche del mezzo poroso esaminiamone solo le caratteristiche idrauliche.

Si definiscono per il mezzo poroso alcuni importanti parametri:

porosità definita come rapporto tra il volume dei vuoti V_v (cioè spazio non occupato da materiale solido) e quello totale V_v+V_g (vuoti + solido):

$$n = \frac{V_v}{V_v + V_g} \quad (20)$$

indice dei vuoti è definito come rapporto tra il volume dei vuoti ed il volume del solido V_g :

$$i_v = \frac{V_v}{V_g} \quad (21)$$

Tra le due quantità sussistono ovviamente le seguenti relazioni:

$$n = \frac{i_v}{1 + i_v} \quad (22)$$

$$i_v = \frac{n}{1 - n} \quad (23)$$

Si definisce ancora una porosità effettiva η , che si differenzia dalla precedente in quanto non si basa sul volume dei vuoti cioè dello spazio non occupato dai solidi, ma invece esprime il rapporto tra volume occupato dai liquidi V_e ed il volume totale:

$$\eta = \frac{V_e}{V_v + V_g} \quad (24)$$

Si definisce ancora coefficiente di saturazione σ il rapporto:

$$\sigma = \frac{V_e}{V_v} \quad (25)$$

con ovvio significato dei simboli, dalle precedenti (24) e (25) segue che:

$$\eta = \sigma n \quad (24')$$

A titolo informativo la porosità, che è la grandezza che più ci interessa, varrà dal 48% (circa) per materiale di granulometria omogenea al 15% per materiale granulometricamente ben assortito.

Osserviamo subito che le definizioni sopra date non sono rigorose da un punto di vista analitico in quanto non è chiaro a quale volume sono definite. Per spiegarci meglio ricordiamo che buona parte delle grandezze che entrano in gioco nei problemi fisici possono avere una chiara definizione puntuale, cioè essere definiti punto per punto, tra questi citiamo la densità, il peso specifico, ecc..... in questi casi tale definizione puntuale è possibile grazie alla continuità del mezzo e, soprattutto a quella della proprietà, oggetto di definizione.

Non è invece, evidentemente, possibile una definizione puntuale di porosità.

Pertanto, definendo la porosità con la (20) ci si deve riferire ad un volume geometrico definito, per esempio un cubo il cui generico lato abbia lunghezza L .

Vista in questa ottica la (20) da per valore della porosità un valore medio per quel dato cubo di lato L . Per renderci meglio conto di tale asserto suddividiamo il cubetto di lato L in 1000 cubetti di lato⁸ $\frac{L}{10}$ per ognuno dei quali, tramite la (20) potrà essere definita una porosità, in genere ognuna diversa da quelle degli altri cubetti. Ebbene, la porosità del cubetto di lato L sarà la media di quelle di lato $\frac{L}{10}$

Potremo, poi, ancora dividere ciascun cubetto di lato $\frac{L}{10}$ in 1000 cubetti di lato $\frac{L}{100}$ ecc....

Abbiamo così introdotto la porosità come una grandezza definita statisticamente su un "dominio" e non puntualmente, cioè come valore caratteristico medio di una certa quantità di materiale la dimensione di quest'ultima sarà dipendente dal tipo e dalla precisione dello studio che vogliamo eseguire;

⁸ Purché il lato L sia molto maggiore della massima dimensione dei grani costituenti la matrice solida del mezzo poroso.

Vediamo ora quali conseguenze porta questa ottica statistica nelle leggi fisiche del moto delle acque sotterranee. Giova tuttavia sottolineare che, questo modo di operare non è una approssimazione - più o meno gratuita - ma una necessità in quanto non è possibile in altro modo definire i parametri di un mezzo poroso.

Inoltre l'ottica statistica ci permette di trattare il problema del mezzo poroso come quello di un continuo.

Prima conseguenza di ciò è che il valore n della porosità, calcolato ad esempio per il cubetto di lato L , viene inteso come relativo a tutti i punti del cubetto stesso come, cioè, se esso fosse omogeneo.

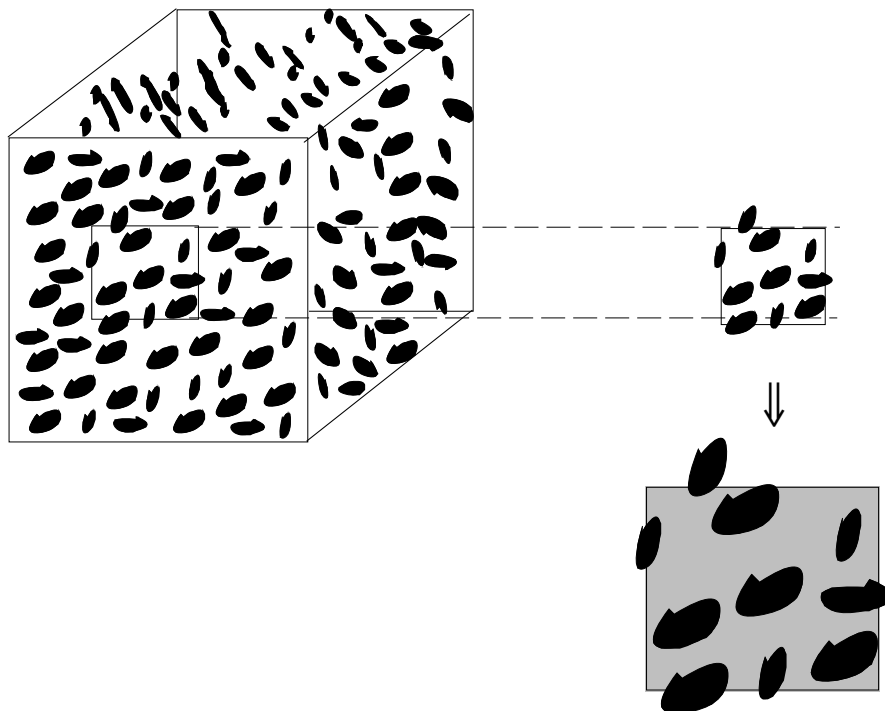
Da questo punto di vista non ha senso parlare per le acque filtranti di velocità puntuale della particella liquida ma sarà opportuno parlare di velocità di filtrazione, che va, intesa anch'essa statisticamente e cioè come rapporto tra la quantità di acqua Q che attraversa una certa sezione finita Ω e la superficie di Ω .

Anche in questo caso il senso statistico risulta evidente, basta, ad esempio pensare ad una superficie quadrata di lato L ed eseguire ragionamenti analoghi a quelli svolti per la porosità.

Ovviamente⁹ esisterà una relazione tra velocità effettiva dell'acqua nei canalicoli del mezzo poroso e quella di filtrazione V_f ed esattamente:

⁹ Infatti con riferimento alla figura seguente

$$V_{x,f} = n V_x$$



e detta Ω_v l'area dei vuoti ed Ω l'area totale, segue, con ovvio significato dei simboli

$$Q = \int V d\Omega_v = \Omega_v V$$

(avendo supposto che la velocità V sia costante) e tenuto conto che :

$$n = \frac{v_v}{(v_v + v_s)} = \frac{\Omega_v}{\Omega}$$

dove V_v é il volume dei vuoti, segue che :

$$\Omega_v = n \Omega$$

dunque:

$$Q = V n A$$

da cui

$$V_f = \frac{Q}{A} = n V$$

quindi la (20).

$$V_{y,f} = n V_y \quad (26)$$

$$V_{z,f} = n V_z$$

o, che è lo stesso:

$$V_f = n V \quad (27)$$

dove n è, al solito, la porosità e ciò, che analiticamente si spiega con lo stesso criterio statistico, è confermato dalle prove sperimentali.

6 La legge di Darcy

Confrontando la (21) con la (13) segue la:

$$V_f = -\frac{n r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \quad (28)$$

che tenuto conto della (12) diventa :

$$V_f = K J \quad (29)$$

dove:

$$K = \frac{n \gamma r^2}{8\mu} \quad (30)$$

che è la nota legge di Darcy¹⁰ dedotta sperimentalmente nel 1856 dal grande idraulico francese. Il coefficiente K è chiamato permeabilità ed ha dimensioni della velocità.

¹⁰ Le leggi dell'Idraulica nel caso di moto permanente si riducono di sovente alla espressione:

$$v = k j^{1/n} \quad (*)$$

dove:

- v indica la velocità (media) dell' acqua;
- j é la pendenza piezometrica;
- k é una costante dipendente da vari fattori

L' esponente n può assumere valori compresi tra 1 e 2, (compresi) in particolare:

- n=1 se il moto é laminare;
- n=2 se il moto é turbolento.

Le stesse leggi sono seguite dall' acqua che circola nel sottosuolo, in particolare:

Invero nel mezzo poroso l'acqua non si muoverà entro canali a sezione circolare, per le quali vale la (30), ma è indubbio che comunque vale la (29) con un coefficiente K più generale di quello espresso dalla (30), che è dato dalla :

$$K = \frac{n \gamma r^2}{a \mu} \quad (30')$$

dove a è un coefficiente di forma.

La (30') tenuto conto che $\gamma = \rho g$ e $\mu = \rho \nu$ può essere scritta nella forma:

$$K = \frac{n g r^2}{a \nu} \quad (31)$$

separando i termini dipendenti dal liquido da quelli dipendenti dal mezzo, avremo:

$$K = \frac{n r^2}{a} \frac{g}{\nu} \quad (32)$$

n=1 cioè il moto sarà di tipo laminare se sia la velocità che la dimensione caratteristica del mezzo in cui l'acqua scorre saranno sufficientemente piccole, ciò si verifica, essenzialmente, nei terreni permeabili per porosità, in particolare quando la granulometria è sufficientemente piccola. La (*) è in tal caso detta legge di Darcy;

n=2 cioè moto turbolento, se esso avviene con velocità ed in canalicoli sufficientemente grandi. E' il caso della circolazione nei calcari fratturati, nelle rocce carsiche o in terreni cistolosi molto grossolani .

Nelle ghiaie, soprattutto se grossolane, si può verificare un moto con n compreso tra 1 e 2.

E' anche opportuno ricordare che la (*) non è rispettata nei terreni a bassissima permeabilità (permeabilità con ordine di grandezza di $10 E - 6$ [m/s]) e ciò perchè in essi la diversa caratteristica è talmente piccola che il moto dell'acqua non avviene secondo le leggi della meccanica classica, in quanto subentrano le "azioni molecolari". Ciò si verifica essenzialmente nei terreni argillosi, ritenuti - in genere - impermeabili; ai nostri fini potremo comunque continuare a ritenerli tali in quanto il flusso attraversato da essi è modestissimo.

si definisce permeabilità geometrica od intrinseca il primo dei fattori a secondo membro della (32) che indicheremo con k , ne segue che:

$$k = \frac{n r^2}{a} \quad (33)$$

Da cui :

$$K = k \frac{g}{\nu} \quad (34)$$

Ne segue che il k è svincolato dal liquido cui la filtrazione si riferisce ed è una caratteristica del mezzo poroso dunque sostituendo la (34) nella (29) avremo un' espressione di validità più generale, cioè atta a liquidi diversi dall' acqua.

$$V_f = k \frac{g}{\nu} J \quad (29')$$

Confrontando la (26) con la (16) otteniamo una diversa generalizzazione della legge di Darcy, quella che ha come riferimento una terna cartesiana comunque orientata

$$\begin{aligned} V_{x,f} &= - \frac{n r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \\ V_{y,f} &= - \frac{n r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) \\ V_{z,f} &= - \frac{n r^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) \end{aligned} \quad (35)$$

A conclusione del presente paragrafo si può dire che la legge di Darcy discende direttamente dalla legge di Poiseuille per il moto laminare in regime uniforme, una volta accettato, come del resto è necessario per il mezzo poroso, il principio statistico, cioè di intendere come significativi i valori medi.

Dalle (35) segue che anche la velocità di filtrazione può avere una interpretazione vettoriale:

$$\mathbf{V}_f = - K \text{ grad } (p + \gamma h) \quad (36)$$

7 L'equazione di continuità e l'equazione di stato

Con ovvio significato dei simboli, avremo che la (2) applicata ad un mezzo poroso pensato come un omogeneo con presenza di acqua in n volte il suo volume, diverrà:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho n \mathbf{V}) = 0 \quad (37)$$

Infatti la massa d'acqua che attraverso l'intera superficie di contorno di un volumetto infinitesimo dx, dy, dz , nel tempo dt sarà:

$$\frac{\partial(n\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n\rho V_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

mentre la variazione di massa all'interno del volumetto è

$$- \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} dx dy dz dt$$

E' necessario soffermarci sull' equazione di continuità ed in particolare sul primo membro della (33) che si è detto rappresenta la variazione di massa all' interno del volumetto di lato dx, dy, dz , supposto omogeneo.

Posto:

$$M = \rho n \quad (38)$$

dove M rappresenta la massa d'acqua all'interno del volumetto, avremo che il suo differenziale varrà:

$$dM = \rho dn + n d\rho \quad (39)$$

quindi si compone di due contributi:

- uno (ρdn) dovuto alla variazione del volume dei vuoti che, a sua volta è dovuta a due distinti componenti:
 - una prima dovuta alla comprimibilità propria delle particelle solide e che noi riteniamo trascurabile e trascuriamo;
 - ed una seconda dovuta alla riduzione dei vuoti prodotti dall'avvicinamento delle particelle solide.

Detta dv la variazione del volume dei vuoti e v il volume di riferimento, avremo:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dn}{n + (1 - n)} = - m_v dp \quad (38)$$

dove m_v è il coefficiente di comprimibilità elastica del terreno.

- un secondo ($n dp$) dovuto alla comprimibilità¹¹ β dell' acqua, Richiamata l'equazione di stato

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{\varepsilon} \right) \quad (3')$$

e tenuto conto che

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon}$$

avremo:

$$d\rho = \rho_0 \beta d(p - p_0) \quad (39)$$

¹¹ la comprimibilità è l'inverso della elasticità ε di cui alla (3') definita tramite la :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta dp \quad (40)$$

essendo, ovviamente β la variazione di volume a seguito della variazione di pressione, espressa dalla:

$$\beta = - \frac{\frac{dv}{v}}{\frac{dn}{dp}} \quad (36)$$

$$dv = - v \frac{n}{dp} dp$$

da cui tenuto conto che :

segue la :

$$d\rho = \rho_0 \beta dp \quad (3''')$$

e quindi:

$$d\rho = \rho_0 \beta dp \quad (40)$$

Segue che:

$$\rho dn + n d\rho = \rho m_v dp + n \rho \beta dp = (m_v + n \beta) \rho dp \quad (41)$$

il segno negativo davanti alla definizione di m_v è nella precedente scomparso perchè la sua variazione di pressione è di segno opposto a quella della definizione di M .

Quindi tenuto conto che:

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = (m_v + n \beta) \rho \frac{\partial p}{\partial t}$$

l'equazione di continuità diviene:

$$(m_v + n \beta) \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho V_f) = 0 \quad (42)$$

Ponendo poi:

$$S_u = (m_v + n \beta) \rho g$$

segue:

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho n V) = 0 \quad (43)$$

S_u è detto *coefficiente di immagazzinamento unitario* ed ha il seguente significato fisico, rilevabile dalla (43):

"il coefficiente di immagazzinamento è la quantità di acqua estraibile da un mezzo poroso di volume unitario tramite una variazione unitaria di pressione".

In definitiva avremo:

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho V_f) = 0 \quad (43')$$

Per le caratteristiche di permanenza la(43) si riduce alla:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_f) = 0 \quad (44)$$

e supposto che ρ non subisca variazioni nello spazio, segue che l'equazione di continuità si riduce alla:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = 0 \quad (45)$$

Confrontando ora la (29'), che ovviamente potrà anche scriversi nella forma:

$$\begin{aligned} v_{x,f} &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ v_{y,f} &= -K \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ v_{z,f} &= -K \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (29'')$$

con la (45), si perverrà alla:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-K \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = 0 \quad (46)$$

e se ora introduciamo l'ipotesi di omogeneità (cioè K costante nello spazio) la (47) potrà anche scriversi nella forma:

$$-K \nabla^2 \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) = \nabla^2 \left(-K \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = 0 \quad (47')$$

Se ora indichiamo con H il binomio $h + p/\gamma$ che rappresenta l'altezza della superficie piezometrica dal piano di riferimento la (47) e la (47') rispettivamente diverranno:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-K \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \quad (48)$$

e, per K costante nello spazio, si ha:

$$\nabla^2 (-K H) = 0 \quad (49')$$

e posto ancora:

$$\phi = - KH \quad (50)$$

segue che la (49') diventa:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (51)$$

cioè un problema di Laplace.

ϕ è il potenziale del moto, che quindi si verifica in un campo conservativo.

Sempre nell' ipotesi di K costante, infatti è immediato verificare che:

$$\begin{aligned} v_{x,f} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_{y,f} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_{z,f} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (52)$$

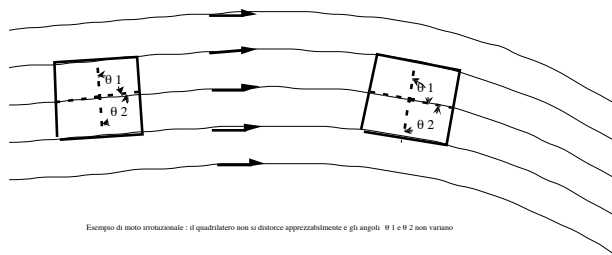
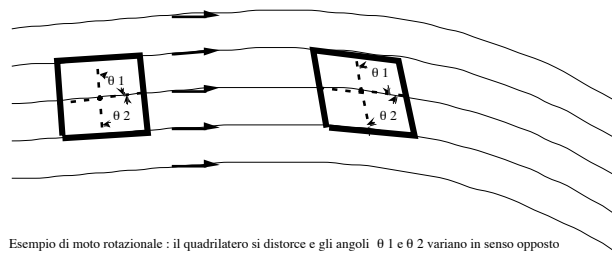
ed inoltre che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{x,f}}{\partial y} &= \frac{\partial v_{y,f}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{y,f}}{\partial z} &= \frac{\partial v_{z,f}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_{x,f}}{\partial z} &= \frac{\partial v_{z,f}}{\partial x} \end{aligned} \quad (53)$$

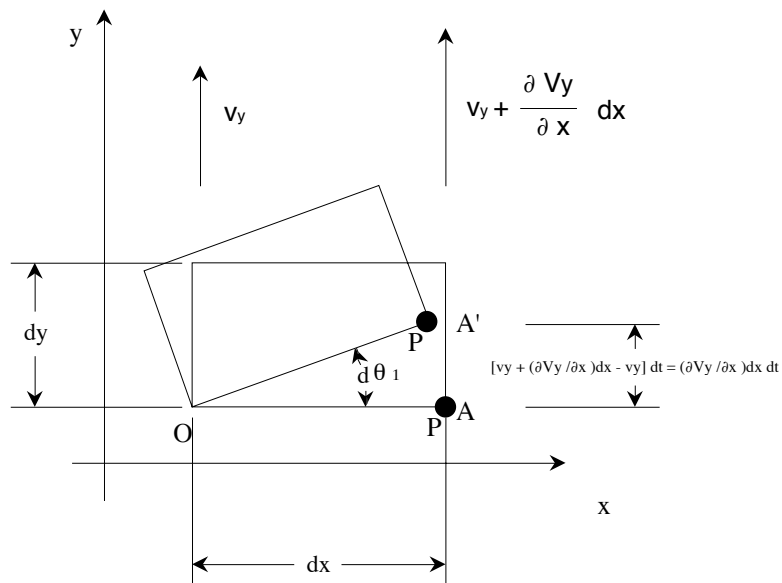
da quest'ultima segue che il campo è conservativo e quindi l' **irrotazionalità** (in media) del moto delle acque filtranti in acquiferi porosi¹².

¹² Pur non volendo entrare in questa sede in problemi di fisica-matematica è tuttavia opportuno non solo ricordare il concetto di irrotazionalità, ma cercare di darne una spiegazione fisica, valogo all' uopo le seguenti illustrazioni:

Questa dimostrata irrotazionalità che è ovviamente legata all'esistenza della funzione potenziale porta delle importanti conseguenze permettendo alcuni, relativamente semplici, procedimenti risolutivi della equazione di Laplace quali quelli basati sulla trasformazione conforme e quelli grafici.



La figura che segue da il significato fisico dei termini matematici che compaiono nell'espressione del rotore:



8.2 Il caso del moto non permanente.

Prima di affrontare l'argomento è opportuna una precisazione sulle denominazioni del paragrafo, infatti non si è volutamente usato il termine di moto vario ma quello di moto non permanente per il seguente motivo:

non affronteremo il moto vario nella accezione più generale ma solo un moto vario molto particolare, quello cioè che pur non mantenendo velocità, portate e pressioni ecc... costanti nel tempo rispetta tuttavia con ottima approssimazione la legge di Darcy, che è tipica del moto permanente, anzi del moto uniforme.

Questa drastica limitazione teorica non è però così restrittiva agli effetti pratici, come a prima vista potrebbe apparire, in quanto difficilmente, nei mezzi porosi, si verificano moti con leggi diverse data la piccolezza delle dimensioni dei canalicoli e le bassissime velocità delle acque.

Ipotizziamo dunque che sia ancora valida la legge di Darcy.

Confrontando ora la (29') con la (43') e tenendo conto della (19'') e che ρ può considerarsi costante nello spazio, segue la:

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} (K \operatorname{grad} H) = 0 \quad (54)$$

che, nel caso di mezzo omogeneo, diventa

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \nabla^2 (-K H) = 0 \quad (55)$$

o, che è lo stesso:

$$\frac{S_u}{g} * \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \nabla^2 \phi = 0 \quad (56)$$

Che sono le equazioni che a seconda che il mezzo sia omogeneo o meno governano il moto non permanente nei mezzi porosi, nell'ipotesi di validità della legge di Darcy.

9 Generalizzazione delle leggi precedenti.

Sino ad ora abbiamo trattato il problema del deflusso delle acque nei mezzi porosi sotto le seguenti ipotesi:

- inesistenza, nel mezzo poroso, di "sorgenti" o di "pozzi".
- mezzo poroso isotropo, cioè con coefficiente K eventualmente variabile da punto a punto ma in uno stesso punto eguale per tutte le direzioni;

Prima generalizzazione: presenza di pozzi o sorgenti

Questi termini di sorgente e pozzo vanno qui intesi in senso matematico, è forse opportuno ricordare che "matematicamente" sussiste un pozzo od una sorgente in un punto P quando, preso comunque un volume infinitesimo τ la cui superficie di contorno σ sia intorno al punto P , il flusso della quantità di fluido che attraversa σ nel tempo dt non è esattamente l'opposto della variazione della quantità di fluido immagazzinata in τ nello stesso tempo.

Ciò analiticamente si esprime tramite la seguente, ovvia, formulazione della equazione di continuità:

$$\frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_f = \rho q' \quad (57)$$

dove q' indica, a seconda se positivo o negativo, la portata volumetrica di fluido che esce o entra dal volumetto τ senza attraversare la superficie σ .

In condizioni di moto permanente, la (57) diventa:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = q \quad (58)$$

e di conseguenza l'equazione che governa il flusso delle acque sarà per le (22''):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p_s}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p_s}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-K \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p_s}{\gamma} \right) \right) = q' \quad (59)$$

ed analogamente, nel caso di moto non permanente avremo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho K \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = \rho q' - \frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (60)$$

Seconda generalizzazione: mezzo anisotropo

Vediamo subito una piuttosto ampia generalizzazione della legge di Darcy, con riferimento al cubetto elementare della figura seguente, esaminiamo la faccetta ABCD che è normale all'asse delle y.

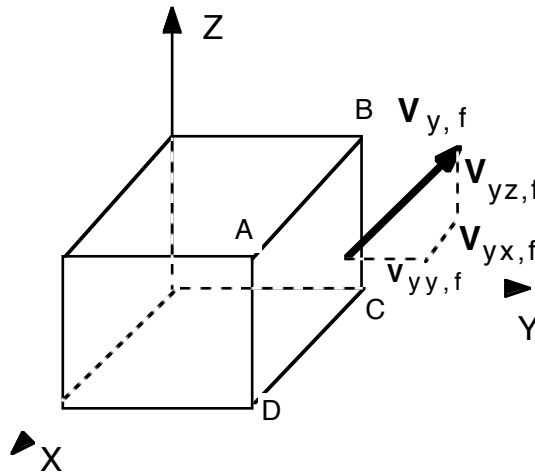


fig. 5 - equazione di continuità

Il vettore \mathbf{V}_f , da esso uscente potrà essere scomposto nelle sue tre componenti.

Se ammettiamo la anisotropia nel mezzo, avremo:

$$\begin{aligned} v_{y,x,f} &= -K_{x,y} \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ v_{y,y,f} &= -K_{y,y} \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \\ v_{y,z,f} &= -K_{z,y} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

Che nelle stesse condizioni assunte per la (11) e successive, soddisfa la (8).

Il primo degli indici della permeabilità K di cui alla (61) sta ad indicare che trattasi della permeabilità relativa alla faccia di normale y.

Con analoghi ragionamenti possiamo introdurre le permeabilità relative alle facce di normale x e z.

Pertanto la permeabilità per uno stesso posto¹³ del mezzo poroso è rappresentata, come altre grandezze fisiche, da un tensore del secondo ordine:

$$\begin{array}{ccc} K_{x,x} & K_{x,y} & K_{x,z} \\ K_{y,x} & K_{y,y} & K_{y,z} \\ K_{z,x} & K_{z,y} & K_{z,z} \end{array}$$

Quindi, con notazione matriciale, detto \mathbf{v}_f il vettore colonna della velocità di filtrazione, \mathbf{K} il tensore della permeabilità e \mathbf{J} il vettore colonna delle pendenze piezometriche, meglio il gradiente di cui alla (19"), avremo che la legge di Darcy generalizzata assume la forma:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{K} \mathbf{J} \quad (62)$$

ed anche questa, nelle stesse condizioni, soddisfa la (8).

Supponiamo ora che anche per la permeabilità valgano le relazioni

$$K_{i,j} = K_{j,i}$$

con :

$$i \neq j \quad (63)$$

e quindi che il tensore abbia solo, in condizioni di generalità, sei componenti tra loro diverse, avremo un tensore simmetrico.

Aggiungiamo ancora l'ipotesi che:

$$K_{i,j} = 0$$

quando:

$$i \neq j \quad (64)$$

segue che il tensore \mathbf{K} si riduce ad una matrice diagonale.

¹³ Il termine posto, e non punto, e' dovuto alla impossibilita' di applicare i concetti di porosita', permeabilita' ecc.. al punto come di norma inteso.

Accenniamo ora soltanto che in queste condizioni non esiste il potenziale del moto, tuttavia è ancora possibile utilizzare una parte dei metodi risolutivi propri delle condizioni di esistenza del potenziale.

La formulazione quindi più generale che tratteremo, tenendo quindi anche conto della anisotropia, sia pur con l'ipotesi (43) è:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K_x \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K_y \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho K_z \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = \rho q' - \frac{S_u}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (64)$$

Molto spesso gli acquiferi hanno una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, infatti le dimensioni dominanti sono quelle planimetriche, la terza, di gran lunga inferiore è il suo spessore, cioè la potenza dell'acquifero.

Occupiamoci ora in particolare di tali acquiferi che sono quelli che più propriamente vanno indicati come falde.

In tali condizioni, cioè di una dimensione nettamente inferiore alle altre due la velocità avrà componenti solo sul piano definito dalle dimensioni maggiori e quindi nulla nella direzione dello spessore. Se allora fissiamo una terna cartesiana ortogonale con gli assi x ed y giacenti sul piano contenenti le componenti non nulle del vettore velocità e l'asse z ortogonale ai precedenti (e ciò non implica ancora la verticalità di z), avremo che $v_{f,z}$ con le sue derivate prime e seconde sarà nullo.

Notiamo ora che in tali ipotesi i termini delle equazioni che regolano il fenomeno sono soltanto funzioni di x e di y (oltre che, ovviamente del tempo) e pertanto sarà opportuno riferire l'equazione indefinita ad una verticale di altezza e (x,y), con e pari, punto per punto, alla potenza della falda, e più non al punto generico (x,y,z).

Integrando quindi la (64) lungo lo spessore e , avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K_x e \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K_y e \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho K_z e \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = \\ = \rho q'_p - \frac{S_u e}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (65)$$

Dove ora q rappresenta gli emungimenti di un pozzo con traccia puntuale sul piano x,y (nel senso non solo matematici del termine ma anche in quello comune) o l'immissione, tramite esso di acqua nella falda;

Notiamo ancora che, nelle nostre ipotesi (cioè quando $V_z = 0$) lungo z , avremo:

$$H = h + \frac{p}{\gamma} = \text{costante} \quad (66)$$

Segue quindi che la (65) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K_x e \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K_y e \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right) \right) = \rho q'_p - \frac{S_u e}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (67)$$

Se ora introduciamo la funzione:

$$H(x,y,t) = h + \frac{p}{\gamma} \quad (68)$$

che è talvolta impropriamente chiamata anch'essa potenziale¹⁴ la (67) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K_x e \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K_y e \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \rho q - \frac{S_u e}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (69)$$

In particolare se ad h assegnamo ora la quota del substrato impermeabile allora h sarà solo funzione di x ed y e non di t, segue che:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \quad (70)$$

pertanto potremo scrivere la:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho K_x e \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho K_y e \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \rho q - S_u e \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (71)$$

che è un'equazione di tipo parabolico¹⁵ (alle derivate seconde spaziali e prime temporali) che governa il deflusso delle acque sotterranee in condizioni di moto non permanente in acquiferi porosi bidimensionali dove gli assi x ed y sono disposti nel piano della giacitura dell'acquifero ed h e H sono misurati lungo la verticale.

Spesso viene introdotta anche la grandezza trasmissività, che risulta definita dalle:

$$T_x = e K_x$$

¹⁴ Il concetto di potenziale qui, evidentemente, non è esatto.

¹⁵ Un'equazione alle derivate parziali si dice di tipo parabolico, iperbolico od ellittico a seconda che le linee caratteristiche (quelle lungo le quali le equazioni possono essere scritte in termini di derivate totali) sono rispettivamente reali e coincidenti, reali e distinte ovvero immaginarie e distinte.

(72)

$$T_y = e K_y$$

e la grandezza coefficiente di immagazzinamento:

$$S = S_u e \quad (73)$$

Ne segue che la (71) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \rho q - S\rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (74)$$

che è ad essa del tutto equivalente.

La formulazione precedente torna utile qualora si conosca la trasmissività e non lo spessore dell'acquifero.

Dalla (74) per l'ammessa invariabilità di ρ con x ed y si giunge alla:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = -q + S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (75)$$

La (75) in alcuni casi è opportuno venga scritta in termini di coordinate cilindriche¹⁶:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(T_r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(T_\vartheta \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \right) = -q + S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (76)$$

¹⁶ Il passaggio da coordinate cartesiane a cilindriche é ovviamente il seguente:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\vartheta = \arctang \left(\frac{y}{x} \right)$$

differenziando e sostituendo, avremo la (76)

10.1 Alcune precisazioni sul problema piano nel caso di moto permanente e mezzo omogeneo

La (75) nel caso di moto permanente, diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = -q \quad (77)$$

ammettendo che il mezzo acquifero sia (o possa essere considerato) omogeneo ed isotropo la precedente può scriversi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial TH}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial TH}{\partial y} \right) = -q \quad (78)$$

dunque:

$$\frac{\partial^2 TH}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 TH}{\partial y^2} = -q \quad (79)$$

ricordando la (50):

$$\phi = -KH \quad (50)$$

e sostituendo nella (79) avremo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = q \quad (80)$$

che in termini sintetici è :

$$\nabla^2 \phi = q \quad (81)$$

Dunque nel caso di assenza di pozzi o sorgenti matematiche cioè quando $q=0$ la (81) diviene nuovamente l'espressione di un moto a potenziale, vale a dire:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (82)$$

nonché:

$$v_{x,f} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

(83)

$$v_{y,f} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

ed inoltre che:

$$\frac{\partial v_{x,f}}{\partial y} = \frac{\partial v_{y,f}}{\partial x} \quad (84)$$

da quest'ultima segue ancora l' **irrotazionalità** (in media) del moto delle acque filtranti in acquiferi porosi.

Le linee per le quali $d\phi$ è nullo, cioè $\phi = \text{costante}$ sono linee equipotenziali, esse hanno espressione:

$$v_{x,f} dx + v_{y,f} dy = 0 \quad (85)$$

L'equazione della generica linea di corrente del moto piano è:

$$\frac{dx}{v_{x,f}} = \frac{dy}{v_{y,f}} \quad (86)$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$v_{y,f} dx - v_{x,f} dy = 0 \quad (87)$$

che altro non è che il differenziale di una funzione ψ detta funzione di corrente tale che:

$$v_{x,f} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (88)$$

$$v_{y,f} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Le due famiglie di linee definite dalla (85) ed (87) cioè, rispettivamente, le equipotenziali e le linee di corrente sono evidentemente tra loro ortogonali, infatti dalla (85) avremo:

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{v_{y,f}}{v_{x,f}} \quad (89)$$

mentre dalla (87)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_{x,f}}{v_{y,f}} \quad (90)$$

da cui ovvio l'asserto che le linee equipotenziali sono ortogonali alle linee di flusso.

Nella seconda parte in sede di applicazioni vedremo l'utilità di tali determinazioni.

Comunque già in questa sede è evidente che anche la funzione di corrente ψ è un potenziale e pertanto vale la:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

e quindi che sussistono le condizioni di irrotazionalità.

10.2 Circa la soluzione matematica del problema piano

La conoscenza, in termini di equazioni indefinite, delle leggi che governano il flusso non ci è di molto aiuto nei problemi pratici, dove di norma ci occorre la soluzione nel finito ed in termini spaziali e temporali delle equazioni appena sopra ricavate.

Ovviamente in generale, risolvere in termini finiti le (75) o le (76) ed analoghe vuol dire risolvere in H (incognite) conoscendo T , S e Q .

Ma tale aspetto, detto **problema diretto**, non è certo l'unico.

Le (75) potrebbero essere utilizzate per conoscere T , noti che siano una soluzione H del problema, le Q e nell'ipotesi di moto stazionario.

Il problema posto in questi termini dicesi di **identificazione**; ed è evidentemente molto più complesso, dal punto di vista matematico, del problema diretto.

E' invece banale risolvere le (75) e/o similari in Q essendo note H e T e nell'ipotesi di moto stazionario.

Sostanzialmente due sono i problemi che comunque si interpongono al passaggio dalle equazioni indefinite a quelle in termini finiti:

- a) la conoscenza del dominio, spazio temporale di integrazione;
- b) la conoscenza delle condizioni iniziali ed al contorno.

Il primo di tali problemi in generale lo si aggira supponendo, cosa non sempre vera, come però vedremo nel seguito, noto il dominio di integrazione.

Le condizioni iniziali, necessarie allorquando si opera in condizioni di moto non permanente, non presentano particolari problemi teorici, trattandosi in generale della conoscenza dei valori di H al tempo $t = 0$.

In questa sede affrontiamo il problema delle condizioni al contorno.

10.3 Le condizioni al contorno

Una qualunque funzione $H(x, y, t)$ che soddisfa le (75) o le analoghe è una soluzione del problema del deflusso delle acque sotterranee ?

Come è ovvio la risposta è certamente negativa infatti le (75) ed analoghe non definiscono alcun problema, ammettendo infinite soluzioni.

Il problema risulta determinato quando alle (75) si associano le condizioni al contorno e nel caso di moto non permanente anche le condizioni iniziali.

Possiamo individuare vari tipi di condizioni al contorno cioè delle condizioni di flusso alla periferia dell'acquifero considerato, il che matematicamente vuol dire che esistono diversi tipi di condizioni alle quali deve soddisfare la funzione H o le sue derivate sulla frontiera del dominio di definizione.

Esaminiamo i vari casi:

A - condizione di "potenziale noto"

Cioè è noto il valore di H sul bordo (o su un suo tratto).

Questa condizione si verifica tutte le volte che si può ritenere nota la superficie piezometrica della falda lungo il bordo (od una sua parte).

B - condizione di flusso nullo

Cioè velocità, sulla frontiera, tangente alla stessa.

Si verifica quando la superficie di contorno è impermeabile ed in altri casi particolari

C - condizione di flusso noto

si conosce la portata che transita per la frontiera del dominio della falda .

Matematicamente dette condizioni vengono imposte come segue:

Caso A

Essendo noto il potenziale è nota anche la soluzione sulla frontiera.

Caso B

Fissato un vettore \mathbf{n} normale esterno al bordo e detto α l'angolo tra esso e l'asse delle x avremo:

$$V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha = 0 \quad (91)$$

cioè:

$$\cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (92)$$

Caso C

Indichiamo ora con dQ la portata nota entrante nel dominio dalla superficie e ds dove ds è l'elemento di linea del contorno del dominio.

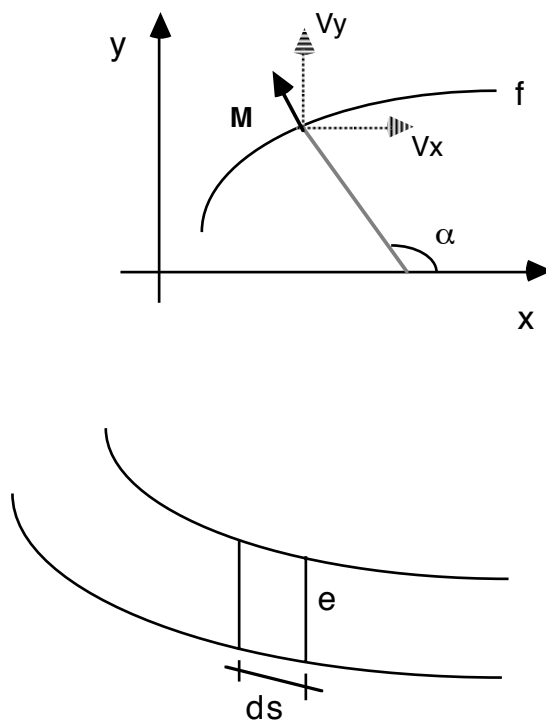


fig.6 - condizioni al contorno

Segue che dovrà essere verificata la:

$$K \left(\cos \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{dQ}{e ds} \quad (93)$$

11 Interpretazione della equazione indefinita del moto di filtrazione in mezzo poroso bidimensionale tramite le funzioni analitiche

La nozione di funzione si estende ovviamente ai numeri complessi, ed in particolare non è difficile concepire una funzione complessa di numeri complessi, cioè una funzione tale che abbia come variabile un numero complesso ($z = x + iy$) e come risultato un'altro numero complesso ($w = u + iv$).

Pertanto in generale avremo

$$w = u + iv = f(x + iy) \quad (94)$$

Più difficoltosa è la definizione di derivata di una funzione complessa, infatti se facciamo riferimento al piano cartesiano x, y il numero $z = (x + iy)$ sarà rappresentata da un punto P del detto piano mentre la funzione f è una superficie generica che ha il proprio dominio di definizione su tutta o su una parte del piano x, y .

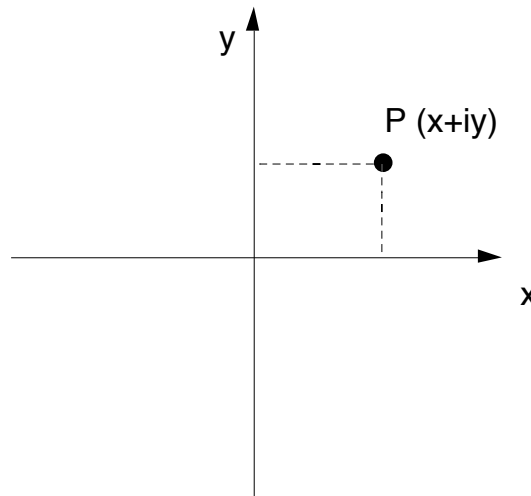


fig. 7 - punto nel piano complesso

Per esempio il piano x, y può essere un piano orizzontale e la funzione f rappresenta la superficie topografica locale.

Come è noto la derivata altro non è che il limite del rapporto incrementale, orbene se è univocamente determinato il rapporto incrementale (e quindi, sotto opportune condizioni, il suo limite) quando trattasi di una funzione le cui variabili indipendenti sono numeri reali, di contro tale univocità non esiste per le funzioni complesse di numeri complessi, in quanto, le direzioni lungo le quali può essere calcolato il rapporto

incrementale sono infinite (infatti nella geometria euclidea piana) sono infinite le rette che possono passare per il punto P.

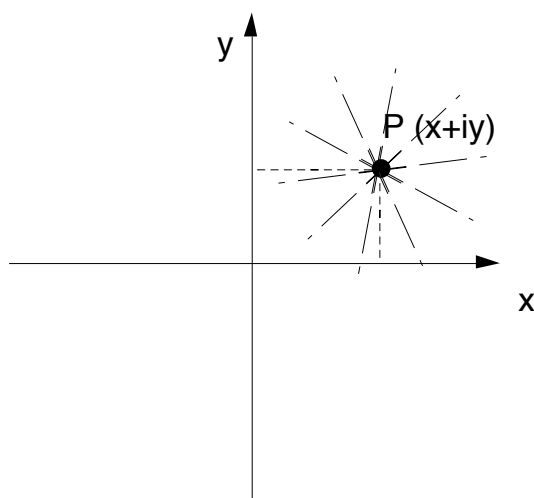


fig. 8 - direzioni da un punto del piano complesso

Ovvio quindi attendersi che in ciascuna direzione si abbia, in generale un diverso valore del limite del rapporto incrementale, e quindi, in sostanza della derivata.

Infatti, facendo ancora riferimento alla superficie topografica, avremo che fissato un punto P di essa, in generale la pendenza sarà diversa a seconda della direzione lungo la quale ci si muove, sempre partendo da P.

Tra la semplice infinità di possibili direzioni possibili vi sono ovviamente anche le direzioni parallele agli assi x ed y e quindi, di certo avrò e:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad (95)$$

e la

$$\frac{\partial w}{\partial y} \quad (96)$$

in generale tra loro diverse e detta dunque s la generica direzione per P avremo che il limite del rapporto incrementale $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ lungo la direzione s, quindi tra P e P₀,

distanti tra loro Δz , come rappresentato in figura:

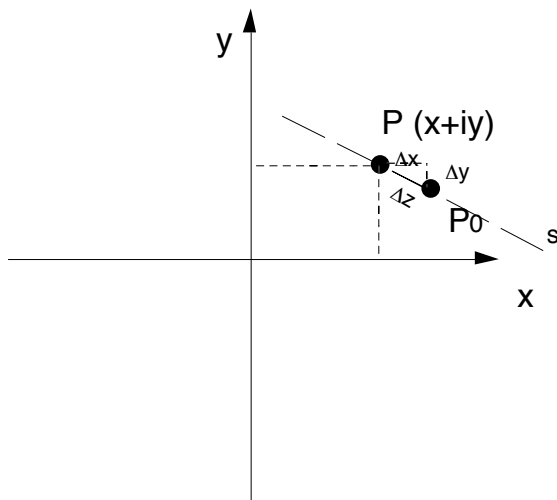


fig. 9 - incremento nel piano complesso

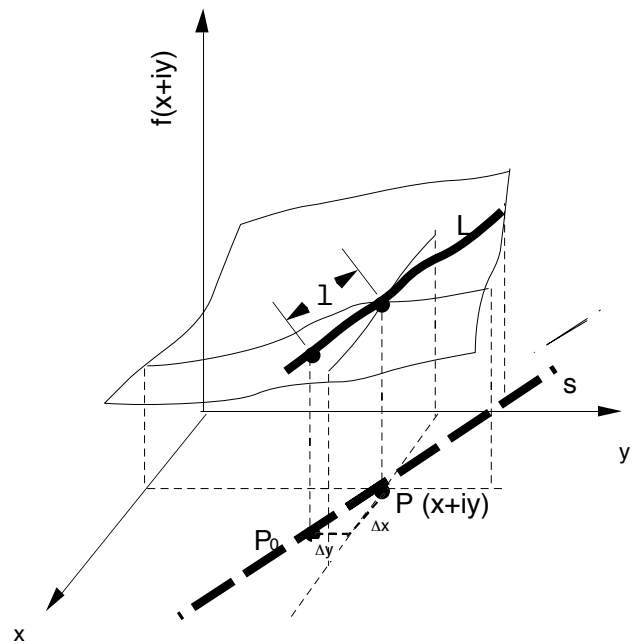


fig. 10 -rapporto incrementale per funzioni complesse di variabile complessa

sarà:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta w}{\Delta s}}{\frac{\Delta z}{\Delta s}} \quad (97)$$

che a sua volta si può esprimere come:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta w}{\Delta s}}{\frac{\Delta z}{\Delta s}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}} \quad (98)$$

Dalla quale è evidente le le derivate per P nelle direzioni parallele agli assi x ed y varranno appunto:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad (99)$$

e

$$i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (100)$$

Dalle precedenti discende dunque che esistono una infinità di valori di derivate per un punto, a seconda della direzione s esaminata.

Una particolare classe di funzioni complesse di variabili complesse che hanno grande significato in molte applicazioni della fisica-matematica (acque sotterranee, topografia, elettronica ecc..) sono le funzioni che hanno carattere di **monogenietà** cioè quelle per le quali la derivata è unica qualsivoglia sia la direzione s lungo la quale la si calcola.

In tal caso dovrà essere:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (101)$$

dunque

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad (102)$$

infatti sostituendo la (102) nella (98) si ottiene la:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + i \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}} \quad (103)$$

e mettendo in evidenza $\frac{\partial w}{\partial x}$ segue:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right)}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (104)$$

e ciò conferma che qualsivoglia sia la direzione s, se è verificata la (101), la derivata è sempre la stessa.

Facciamo ancora riferimento alla (101) e sostituiamo a w le sue componenti reali ed immaginarie, vale a dire sostituiamo a w il binomio $u + i v$, segue:

$$\frac{\partial(u + i v)}{\partial x} = i \frac{\partial(u + i v)}{\partial y} \quad (105)$$

da cui scindendo parte reale e parte immaginaria, avremo:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \quad (106')$$

$$i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}$$

e moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per i segue:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (106'')$$

Derivando¹⁷ la (106') una seconda volta per x e la (106'') per y avremo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad (107')$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (107'')$$

e sostituendo, avremo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (108)$$

cioé:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (109)$$

ed analogamente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (110)$$

Se ne deduce che sia la parte reale u che quella immaginaria v di una funzione complessa w sono soluzioni di un'equazione di Laplace, e detta θ tale funzione possiamo sinteticamente scrivere:

¹⁷ Si trascura in questa sede la dimostrazione dell' esistenza e la continuità delle derivate di ordine superiore al primo.

$$\Delta^2 \theta = 0 \quad (111)$$

Le (106') e (106'') sono dette condizioni di monogenità o di CAUCHY-RIEMANN¹⁸ e una funzione monogena e detta, in generale, funzione analitica¹⁹.

Conseguenza importantissima in generale, e poi, in particolare ai nostri fini, è che una funzione analitica opera tra i piani x ed y di dominio e u, v di codominio (o di immagine) una **trasformazione conforme**²⁰, cioè tale che l'angolo formato da due qualsiasi curve uscenti da un punto P del piano $\{x, y\}$ sia lo stesso di quello che si formerà tra le corrispondenti curve del piano $\{u, v\}$

Oltre ad altre importanti conseguenze che ove il caso verranno richiamate all'occorrenza ci preme evidenziare come i concetti matematici sopra esposti si possono utilizzare per lo studio del moto dei fluidi ed in particolare per quello delle acque sotterranee in mezzo poroso.

In particolare è evidente che la (106') coincide con l'equazione di continuità,

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

quando amettiamo che il generico vettore velocità nel piano $\{x, y\}$ sia definito dalla

$$\mathbf{V} = v_x(x, y) \mathbf{i} - v_y(x, y) \mathbf{j} \quad (112)$$

¹⁸ Bernard Riemann (1826-1866) fu allievo di grandi matematici quali Jacobi e Dirichlet poi assistente di Weber. Subentrò a Dirichlet nella cattedra di matematica di Gottinga. È noto tra l'altro per la teoria dei numeri a partire da una funzione complessa e soprattutto per lo sviluppo della geometria non euclidea di tipo ellittico (al contrario di quella di Lobachevskij) dove viene rivisto anche il concetto di retta (negando anche l'esistenza, e non solo l'unicità della retta parallela alla data del V postulato d'Euclide). Tale geometria tipica della curvatura costante, tipico della superficie sferica ha poi fornito il modello spazio-temporale (cronotopo) che permise lo sviluppo della teoria della relatività ad A. Einstein.

¹⁹ In effetti esiste tra i due tipi di funzione una modesta differenziazione che tuttavia non ci riguarda (vedi § 1.8 del testo del TRICOMI "Istituzione di Analisi superiore" ed. Cedam Padova.

²⁰ Per la dimostrazione del concetto, peraltro non difficile, si rimanda al Tricomi, già citato.

mentre la (106 ") coincide con

$$\text{rot } \mathbf{V} = 0$$

Dunque ogni funzione analitica oltre ad essere *connessa con una trasformazione conforme* è altresì rappresentatrice di un moto ***bidimensionale irrotazionale di un fluido incompressibile***²¹

Ne discende comunque la possibilità di studiare le acque sotterranee tramite la metodologia delle trasformate conformi.

²¹ É evidente che nel caso delle acque sotterranee tale condizione la si ottiene solo per il moto permanente e per le velocità di filtrazione e non per le velocità effettive.

12 L'integrazione delle equazioni indefinite delle acque sotterranee.

Per poter operare ingegneristicamente sulle acque sotterranee notoriamente occorre passare dalle equazioni indefinite a equazione in termini finiti, cioè integrare la (75) od analoghe.

E' evidente che per integrare le (75) o le (76) occorre conoscere innanzitutto il bacino di integrazione (dominio) cosa che non sempre si verifica, ma, in questa sede non esaminiamo il caso di tale ultima eventualità.

Poi, come detto in 10.2 dovranno essere note condizioni iniziali ed al contorno.

Orbene, non per tutta l'estesissima gamma di casi, è possibile trovare una soluzione analitica.

In quanto segue esamineremo le soluzioni analitiche più ricorrenti e poi faremo riferimento alle soluzioni numeriche ottenibili con il metodo delle differenze finite e quindi un cenno a quelle alle trasformate conformi.

12.1 L'integrazione analitica delle equazioni indefinite delle acque sotterranee.

12.1.1 Idraulica delle sorgenti

Nel presente paragrafo faremo riferimento solo ad acque sotterranee fluenti in un mezzo poroso (a granulometria sufficientemente fine tale che l'acqua vi fluisca in condizioni di moto laminare) l'unico per il quale possa farsi una trattazione idraulica sufficientemente rigorosa e verosimile al modello fisico, cosa non possibile - come ben noto - per acque fluenti nel mezzo fratturato ed in quello carsico, per i quali non è nota la geometria delle canalizzazioni attraversate dall'acqua.

Prima di affrontare, sia pur per sommi capi, l'Idraulica delle sorgenti è necessario dare qualche cenno in generale su di esse.

Salvo casi particolari, sono il ritorno naturale in superficie delle acque defluenti nelle falde sotterranee.

L'idrodinamica dell'acqua che alimenta la sorgente sarà ancora governata nelle stesse ipotesi di falda bidimensionale ecc..... dalla (75), la cui integrazione fornisce, nel caso particolare di sorgente, cioè fissati i valori di x e di y che sono in questo caso la frontiera del dominio, la legge:

$$h = h(t) \quad (113)$$

che è la legge del regime della sorgente o come vedremo la legge di esaurimento.

Il regime delle sorgenti è diverso a seconda del tipo, dell'estensione del bacino di alimentazione, della potenza dell'acquifero, ecc... .

Si pensi che si passa dalle sorgenti intermittenti od intercalari (ovviamente di scarso interesse ai fini utilizzativi in quanto non assicurano alcuna continuità di erogazione) a quelle quasi costanti per portata e caratteristiche chimico-fisiche.

Evidentemente sono queste ultime le più interessanti per l'utilizzazione.

Circa il loro regime l'interesse è volto soprattutto alle portate minime in quanto su queste e sulla loro durata occorre basarci per la valutazione della disponibilità idrica da esse traibile.

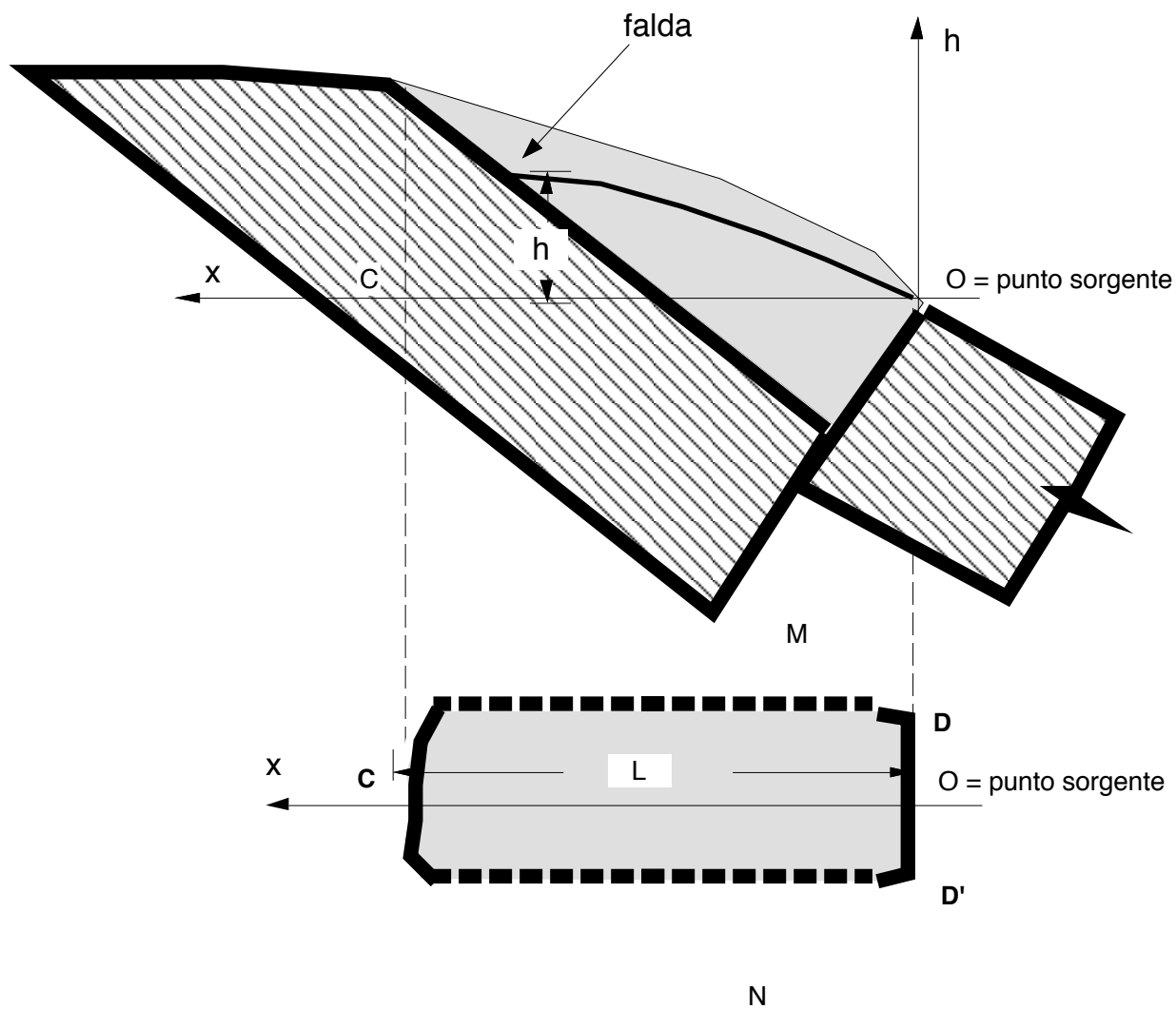


Fig. 11 - Schema teorico di una sorgente (di sbarramento)

Queste considerazioni spiegano l'interesse rivolto alle "curve di esaurimento" che si possono ottenere elaborando le precedenti equazioni;

Evidentemente le portate minime si verificano a seguito di un periodo di non alimentazione dell'acquifero.

Per utilizzare la (75) schematizziamo l'acquifero come nella figura precedente.

Sia DMCND' la curva di intersezione del piano orizzontale {x,y} passante per il punto di sbocco O con la superficie impermeabile che delimita l'ammasso permeabile contenente la riserva d'acqua costituita dalle acque precedentemente infiltratesi nel terreno.

La superficie impermeabile viene supposta cilindrica a generatrici verticali secondo la traccia D-M-C-N-D'. Una parte D-D' del contorno si suppone orizzontale; davanti a D-D' si suppone tolta l'eventuale coltre di materiale detritico permeabile e pertanto sia D-D' la soglia della sorgente.

Se ora ipotizziamo

$$\frac{dh}{dy} = 0$$

cioè che la falda freatica abbia la configurazione di un cilindro con generatrici orizzontali normali al piano {x,h} segue:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (114)$$

il cui integrale generale è dato dalla:

$$h = C \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\alpha S}{K}} x + C_1 \right) e^{-\alpha t} \quad (115)$$

infatti derivando la precedente prima rispetto a t e poi due volte rispetto a x, si otterrà:

$$\frac{\delta h}{\delta t} = - C \alpha \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\alpha S}{K}} x + C_1 \right) e^{-\alpha t} \quad (116)$$

$$\frac{\delta h}{\delta x} = C \sqrt{\frac{\alpha S}{K}} \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha S}{K}} x + C_1 \right) e^{-\alpha t} \quad (117)$$

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} = - C \frac{\alpha S}{K} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\alpha S}{K}} x + C_1 \right) e^{-\alpha t} \quad (118)$$

Dal confronto tra la (116) e la (118) segue la (114), pertanto la (115) risulta verificata.

La portata liquida attraverso un ammasso filtrante è ovviamente data dalla

$$Q = V A = K A J \quad (119)$$

con ovvio significato dei simboli, e preso atto che la pendenza J , è:

$$J = \frac{\delta h}{\delta x},$$

dove il segno meno è omissso dato il verso prescelto per l'asse delle x

Quindi in prossimità di $D-D'$, cioè dove $x=0$ avremo:

$$A = h$$

avendo supposto di applicare la(119) per un lunghezza unitaria lungo l'asse y

$$\frac{\partial h}{\partial x} = C \sqrt{\frac{\alpha S}{K}} \cos C_1 e^{-\alpha t} \quad (120)$$

pertanto, tenuto ora conto che i primi tre fattori del secondo membro sono costanti si può eseguire la seguente posizione:

$$C_2 = C \sqrt{\frac{\alpha S}{K}} \cos C_1 \quad (121)$$

quindi si perviene alla:

$$Q = K h C_2 e^{-\alpha t} \quad (122)$$

e, tenendo nuovamente conto che i primi tre fattori della precedente sono costanti e quindi eseguendo la posizione:

$$Q_0 = K h C_2 \quad (123)$$

si giunge alla:

$$Q_0 = Q_0 e^{-\alpha t} \quad (124)$$

cioè la caratteristica curva di esaurimento.

Il termine $e^{-\alpha t}$, come è facile verificare, ha le dimensioni di un numero puro, mentre α ha le dimensioni di $[s^{-1}]$ e si chiama coefficiente di esaurimento. La validità della (124) è più generale di quella che appare dallo schema per la quale è stata dedotta;

La (124) viene utilizzata per lo studio delle magre o meglio per la previsione delle portate minime delle sorgenti, tramite la misura sistematica, per esempio mensile, delle portate erogate dalle manifestazioni sorgentizie (ovviamente in periodo di non influenza delle piogge).

La (124) può anche essere scritta nella forma:

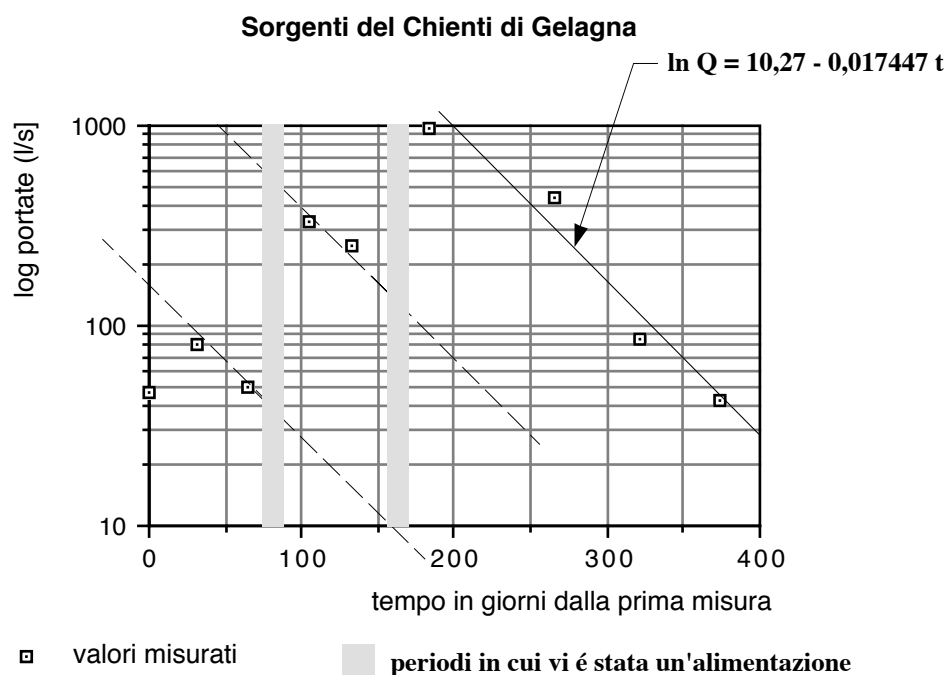
$$\ln Q = \ln Q_0 - \alpha t \quad (125)$$

che è l'equazione di una retta in scala semilogaritmica.

Si suole porre l'asse del tempo (t in giorni) su scala normale in ascisse e l'asse delle Q su scala logaritmica in ordinate: segue che su un tale grafico, vedi fig. 12, i punti, corrispondenti alle osservazioni eseguite, si disporranno pressochè allineati.

L'ordinata all'origine ed il coefficiente angolare della retta di compensazione forniranno rispettivamente i valori di Q_0 ed α .

Si badi che il grafico e le letture devono essere eseguite con i logaritmi naturali.



[da Bernardini, Mantica Tommasoni, Contributo alla conoscenza della circolazione delle acque sotterranee nell' alta valle del Chienti di Gelagna. Idrotecnica. Maggio, 1983].

$$\ln Q_0 = 10,27 \rightarrow Q_0 = 28.853,89 \quad ; \quad \alpha = ,017447$$

fig. 12- Curva di esaurimento per le sorgenti del Chienti di Gelagna

E' ancora importante notare che la (125) può fornire il totale volume d'acqua immagazzinato, sempre nell'ipotesi della sua validità, infatti detto volume, che indicheremo con W , è dato dalla

$$W = \int_0^{\infty} Q(t) dt \tag{126}$$

che eseguito l'algoritmo da:

$$W = \frac{Q_0}{\alpha}$$

Riportiamo un esempio di calcolo del coefficiente di esaurimento α e di immagazzinamento W , con riferimento alla figura precedentemente.

In un diagramma semilogaritmico $\lg(Q)$ - t , sono stati riportati i dati di portata rilevati nel 1979 per le sorgenti del Chienti di Gelagna a partire dalla massima portata sino alla minima registrata.

I punti vengono interpolati da una retta di espressione generale (125), che può scriversi anche (passando dai logaritmi neperiani a quelli decimali):

$$\lg Q_t = 10,7 - 0,017447 t \quad [m^3/s]$$

A questo punto, tenendo conto che $e^{10,7} = 28,853$, è possibile scrivere l'espressione completa della curva di esaurimento che, nel caso in esame, sarà

$$Q_t = 28,853 e^{-0,017447 t} \quad [m^3/s]$$

Integrando la quale da $t = 0$ a $t = \infty$, cioè dal momento di inizio della fase di esaurimento al suo completo verificarsi e tenendo conto che l'espressione al secondo membro della precedente è espresso in m^3/s , mentre il denominatore (α) è espresso in $giorni^{-1}$, è necessario moltiplicare la Q_0 per il numero di secondi in un giorno (86400) per omogeneizzare l'espressione stessa

$$W = \int_0^{\infty} 28,853 * 86400 e^{-0,017447 t} dt$$

$$W = \frac{28,853 * 86400}{0,017447} = 142'884'117,61 \quad [m^3]$$

La conoscenza dell'equazione della curva di esaurimento di una sorgente e dei volumi immagazzinati dall'acquifero alimentatore è fondamentale per la previsione della portata di magra e dei volumi immagazzinati, e dunque per la gestione corretta delle risorse idriche.

Un altro procedimento grafico per lo studio del regime di esaurimento delle sorgenti è quello proposto dal Maillet, detto dei grafici d'annuncio.

Se eseguiamo le misure della portata erogata dalla sorgente ad intervalli di tempo uguali (per esempio mensili) e ponendo:

per la prima misura,	cioè quando	$Q = Q_0$	per	$t = 0$
per la seconda misura,	cioè quando	$Q = Q_1$	per	$t = 1$

ecc.

e quindi scrivendo la (124) nella forma:

$$Q_i = Q_0 e^{-\alpha i} \quad (127)$$

con $i = 0, \dots, N$ se N sono le osservazioni.

La (127) può essere interpretata come rette per l'origine di un grafico con Q_0 in ascisse e $Q_t = Q_t$ in ordinate (scale normali) e coefficienti angolari $e^{-\alpha t}$. Si perviene cioè a tante rette quante sono le misure: la prima di esse sarà la bisettrice al primo quadrante (infatti $e^0 = 1$) e quelle relative alle successive misure avranno per coefficienti angolari ordinatamente:

$$e^{-\alpha}, e^{-2\alpha}, e^{-3\alpha}, e^{-4\alpha}, e^{-5\alpha}, \dots, e^{-n\alpha}$$

Ne segue il grafico di figura 13 detto appunto dei grafici d'annunzio.

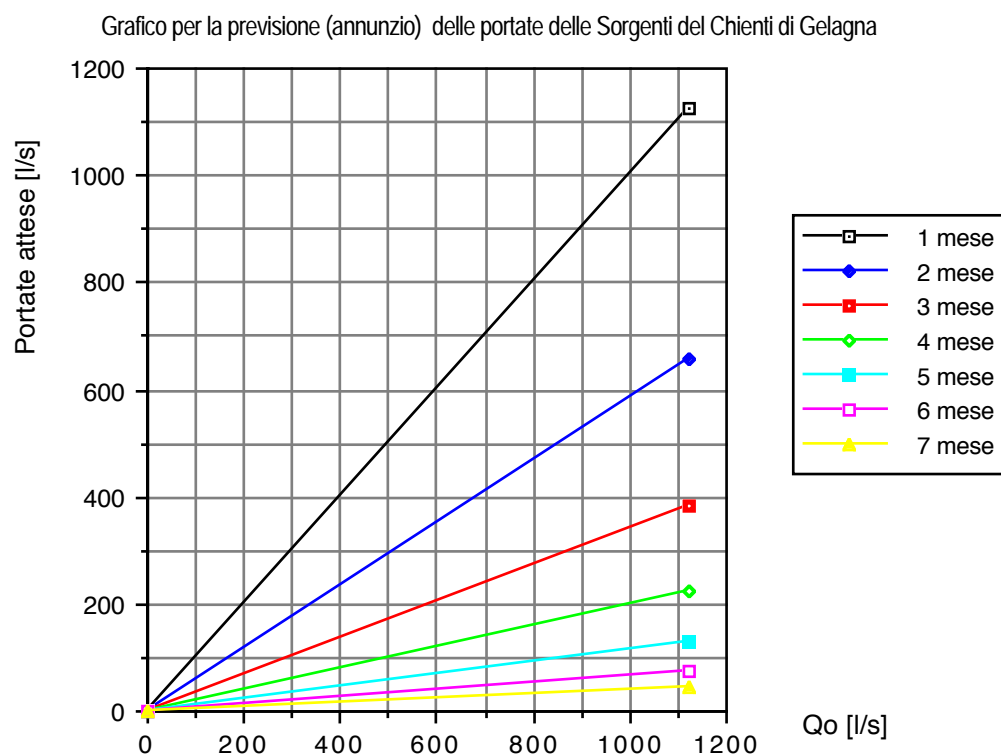


fig. 13 - Grafico del Maillet o d'annunzio per le sorgenti del Chienti di Gelagna

Per la previsione delle portate di una sorgente si costruiscono i grafici d'annunzio in base alle osservazioni precedentemente eseguite sulla sorgente, quindi dalla misura attuale della portata, che si riporta sul grafico in ascissa, si legge in ordinata, per ciascuno dei periodi successivi, le relative portate che presumibilmente potrà dare la sorgente.

12.1.2 I pozzi e le trincee

In quanto segue non affronteremo tutto l'interessante ed ampio campo dei pozzi e delle trincee ma solo quei casi che possono essere risolti integrando le (75) o le (76).

Sono necessarie, a monte, talune precisazioni.

Dapprima verranno trattati i pozzi, indubbiamente sistema oggi più in uso delle trincee che col tempo hanno mostrato, come vedremo nel seguito, talune limitazioni.

Nell' ambito dei pozzi distingueremo tra :

- regime permanente e regime non permanente;
- pozzo in acquifero artesiano o freatico;
- pozzo singolo o gruppi di pozzi, e, tra questi ultimi a seconda delle disposizioni reciproche.

Ne segue dunque un'articolazione estremamente varia e complessa che sarà affrontata nella seconda parte. Qui ci si sofferma solo sulle soluzioni analitiche della (75) e (76) nei seguenti casi:

- a) pozzo artesiano singolo;
- b) pozzo freatico singolo;
- c) trincea.

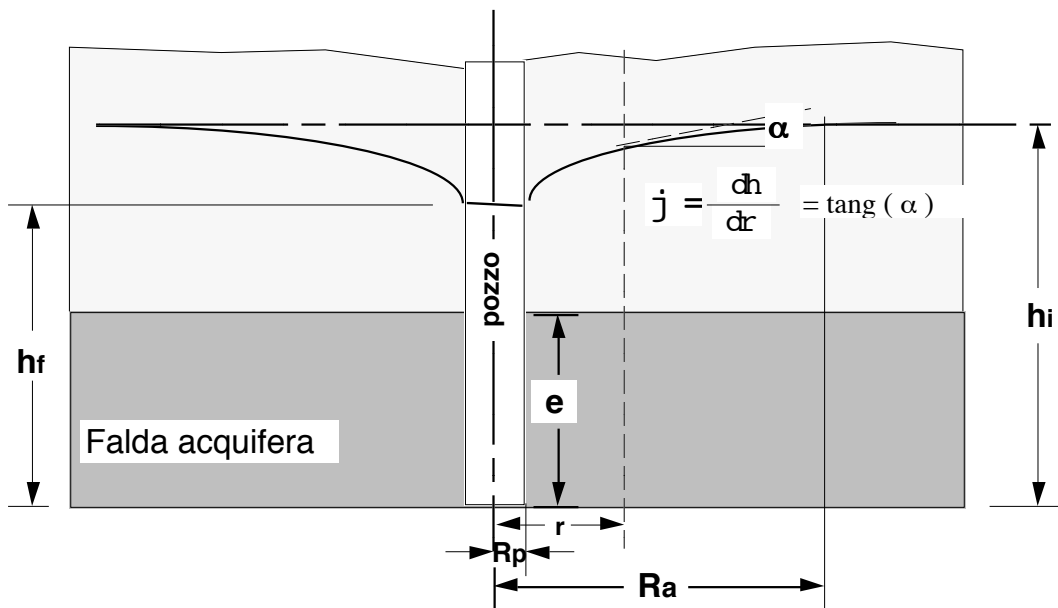
12.1.2.1 Il pozzo artesiano singolo in regime permanente

Il caso del pozzo singolo artesiano è il più semplice ed è stato studiato in epoca remotissima.

Qui di seguito ci ricondurremo alle equazioni generali prima ricavate, ma non solo per motivi storici, facciamo precedere tale trattazione dal ben note ipotesi semplificative della teoria del Du Puit (che risale ben al 1863, cioè appena di 7 anni

posteriore alla formulazione sperimentale di Darcy circa la linearità del moto delle acque filtranti nei mezzi porosi) con la quale fu trovata inizialmente l'equazione che ora andremo a ricercare²²:

22 In quanto segue è la classica trattazione del Du Puit, con riferimento alla figura seguente avremo:



dove indicando con :

- Q la portata del pozzo
- e lo spessore dell' acquifero;
- K la permeabilità
- R_a il raggio d'azione del pozzo, dove la posizione piezometrica non risente dell' emungimento
- R_p il raggio del pozzo,
- h_f la posizione della piezometrica all' interno del pozzo (ed a raggiungimento del moto permanente;
- h_i la posizione della piezometrica prima dell' emungimento e, poi, durante l'emungimento ma a distanza $\geq R_a$ rispetto al pozzo;
- M un generico punto a distanza r dal pozzo

Con riferimento alla formula di Darcy :

$$Q = K A j$$

ed applicandola alla superficie cilindrica il cui asse sia l'asse del pozzo e la cui superficie laterale passi per il citato punto M, distante r dall' asse del pozzo, tenuto conto che:

$$A = 2 \pi e r$$

$$j = \frac{dh}{dr}$$

dove è stato omesso il segno meno in quanto h decresce con r

pertanto avremo :

$$Q = 2 \pi K e r \frac{dh}{dr} \quad (*)$$

separando le variabili ed integrando, si perviene alla:

$$\frac{Q}{2 \pi K e} \ln r + C = h$$

dove C é una costante di integrazione da determinarsi tramite le condizioni al contorno.

Assumendo come tali le seguenti :

Per $r = r_p$ sia $h = h_f$

e

per $r = R_a$ sia $h = h_i$

avremo:

$$\frac{Q}{2 \pi K e} \ln r_p + C = h_f \quad (i)$$

$$\frac{Q}{2 \pi K e} \ln R_a + C = h_i \quad (ii)$$

sostituendo il valore di C ricavato dalla (ii) nella (i), avremo:

- 1) regime permanente;
- 2) l'acqua ed il mezzo poroso sono incomprimibili;
- 3) il moto è laminare;
- 4) il mezzo è isotropo ed omogeneo;
- 5) la componente verticale della velocità è trascurabile rispetto a quella orizzontale;
- 6) velocità costante lungo la verticale;
- 7) la superficie piezometrica si raccorda con il livello idrico nell'opera di captazione.

Notiamo che delle sette ipotesi del De Puit la 2), 3), 5), e 6) sono implicitamente contenute nelle (75) e (76).

La 1) si impone immediatamente annullando la derivata temporale ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$).

La 4), già in parte implicita nella 2), si impone tramite le:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (128)$$

$$T_x = T_y$$

conseguenza immediata delle quali è che l'opera di captazione sia elemento di simmetria (radiale nel caso del pozzo, speculare nel caso di trincea).

$$Q = 2 \pi K e \frac{h_i - h_f}{\ln \left(\frac{R_a}{r_p} \right)} \quad (iii)$$

Applichiamo ora la (76) ad un pozzo, avremo, per la suddetta simmetria radiale, che essa si riduce alla:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(T_r \frac{dh}{dr} \right) = Q^* \quad (129)$$

dove si è anche tenuto conto che, nelle nostre ipotesi, h dipende solo da r .

Se ora indichiamo con Q la portata erogata dal pozzo di raggio generico r , ovviamente varrà la

$$Q = \pi r^2 Q^* \quad (130)$$

da cui:

$$\frac{dQ}{dr} = 2 \pi r Q^* \quad (131)$$

e quindi:

$$Q^* = \frac{1}{2 \pi r} \frac{dQ}{dr}$$

che sostituita nella (129) fornisce:

$$\frac{d}{dr} \left(T_r \frac{dh}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \frac{Q}{2\pi} \quad (132)$$

che equivale a

$$2\pi T_r \frac{dh}{dr} = Q + C_1 \quad (133)$$

con C_1 costante da valutarsi in base alle condizioni al contorno.

Separando le variabili si perviene alla :

$$\frac{2 \pi T_r}{Q} dh = \frac{dr}{r} + C_1 dr \quad (134)$$

Per le falde artesiane, cioè quelle per le quali la potenza (lo spessore) della falda è indipendente dalle vicende della sua piezometria stante le condizioni al contorno derivanti dalla settima ipotesi del De Puit:

$$r = r_p \Rightarrow h = h_f \quad (135')$$

$$r = R_a \Rightarrow h = h_i \quad (135'')$$

dove:

- r_p raggio del pozzo;
- h_f altezza dell'acqua nel pozzo (in condizioni di rispetto della prima ipotesi di De Puit);
- R_a raggio d'azione, cioè distanza dalla quale non è più sensibile sul livello idrico, l'effetto dell'emungimento ;
- h_i altezza piezometrica nel pozzo prima dell'emungimento (altezza iniziale) supposta pari all'altezza piezometrica indisturbata relativa ad una distanza dal pozzo almeno pari ad R_a o superiore.

Si ottiene dalla integrazione della (134) la:

$$\frac{2\pi T}{Q} (h_i - h_f) = \ln \frac{R_a}{r_p} \quad (136)$$

Si dimostra facilmente che $C_1 = 0$. Segue che la portata Q è data dalla:

$$Q = 2\pi T \frac{h_i - h_f}{\ln \frac{R_a}{r_p}} = 2\pi K \frac{h_i - h_f}{\ln \frac{R_a}{r_p}} \quad (137)$$

12.1.2.2 Il pozzo freatico singolo in regime permanente

La (132) nel caso di pozzi freatico va scritta come segue:

$$\frac{d}{dr} \left(K_r h \frac{dh}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \frac{Q}{2\pi} \quad (138)$$

che equivale a

$$2\pi K_r h \frac{dh}{dr} = Q + C_1 \quad (139)$$

con C_1 costante da valutarsi in base alle condizioni al contorno.

Separando le variabili si perviene alla :

$$\frac{2\pi K_r}{Q} h dh = \frac{dr}{r} + C_1 dr \quad (140)$$

Integrando la precedente sempre nelle ipotesi (153') e (135") e riordinando la formula si perverrà alla:

$$Q = \pi K \frac{h_i^2 - h_f^2}{R \ln \frac{a}{r_p}} \quad (141)$$

12.1.2.3 Il pozzo artesiano singolo in regime non permanente

Diamo ora un breve cenno al regime "non permanente" che lo si può suddividere in:

- regime non permanente a portata costante;
- regime non permanente a portata variabile.

La soluzione della problematica del pozzo in regime non permanente si ottiene tramite l'integrazione della (76) che nell'ipotesi di isotropia diventa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(T_r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = Q^* - S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (76')$$

la cui soluzione, dipendente dalle condizioni al contorno e da quelle iniziali, viene ricercata, date le difficoltà del procedimento diretto, indirettamente cioè prendendo funzioni che soddisfano la (76') e studiando le condizioni al contorno.

Nel caso di Q costante si dimostra²³ che l'abbassamento della falda $\xi = h - h_1$ distanza r dal pozzo, provocato dall'emungimento, al tempo t dal suo inizio, è dato dalla:

$$\xi = C \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4 S t}}}{t} dt \quad (142)$$

dove la costante C è valutabile tramite la (*) della precedente nota:

$$Q = - \lim_{r \rightarrow 0} \left(2 \pi T_r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \quad (*)$$

dalla quale segue che:

²³ In questa sede si omette la dimostrazione, peraltro analoga, *mutatis mutandis*, a quella già riportata per la (115) cioè per la legge delle sorgenti.

$$Q = - \lim_{r \rightarrow 0} \left(2 \pi T r \frac{\partial C}{\partial r} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4 S t}}}{t} dt \right) \quad (143)$$

Dalla quale, eseguendo le derivazioni ed eliminando subito il termine che ha tra i fattori r, perché questo deve tendere a zero, avremo:

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} \left(4 \pi T C e^{-\frac{r^2}{4 S t}} \right) \quad (144)$$

dunque,

$$Q = 4 \pi T C$$

e quindi:

$$C = \frac{Q}{4 \pi T}$$

ed alla fine, sostituendo nella (142), avremo:

$$\bar{u} = \frac{Q}{4 \pi T} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4 S t}}}{t} dt \quad (145)$$

Definendo ora una nuova variabile u, come segue:

$$u = \frac{r^2}{4 S t} \quad (146)$$

ed effettuando le sostituzioni, avremo:

$$\int_0^t \frac{r^2}{4 S t} e^{-\frac{r^2}{4 S t}} dt = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (147)$$

Prima dell' avvento dei computer l' integrale a secondo membro, cioè un integrale logaritmico, non era di facile soluzione, per cui si usavano rappresentazioni grafiche e tabulati.

In particolare veniva definita una funzione

$$-E_i(u) = \int_0^t \frac{e^{-u}}{u} du \quad (148)$$

di cui riportiamo il tabulato ed il grafico peraltro oggi facilmente calcolabili tramite l'uso di fogli elettronici (EXCEL e relative macro):

u	f(u)	-E(u)	ln(1/1,781*u)
0,01	99,0049834	4,11505	4,02800
0,1	9,0483742	1,82366	1,72541
0,2	4,0936538	1,22277	1,03226
0,3	2,4693941	0,90568	
0,4	1,6758001	0,70234	
0,5	1,2130613	0,55972	
0,6	0,9146861	0,45431	
0,7	0,7094076	0,37370	
0,8	0,5616612	0,31052	
0,9	0,4517441	0,26010	
1	0,3678794	0,21930	
2	0,0676676	0,04881	
3	0,0165957	0,01296	
4	0,0045789	0,00369	
5	0,0013476	0,00106	
6	0,0004131	0,00027	
7	0,0001303	0,00003	
8	0,0000419	0,00000	
9	0,0000137	0,00000	
10	0,0000045	0,00000	
20	0,0000000	0,00000	

fig. 14 - Tabulazione della funzione -E(u)

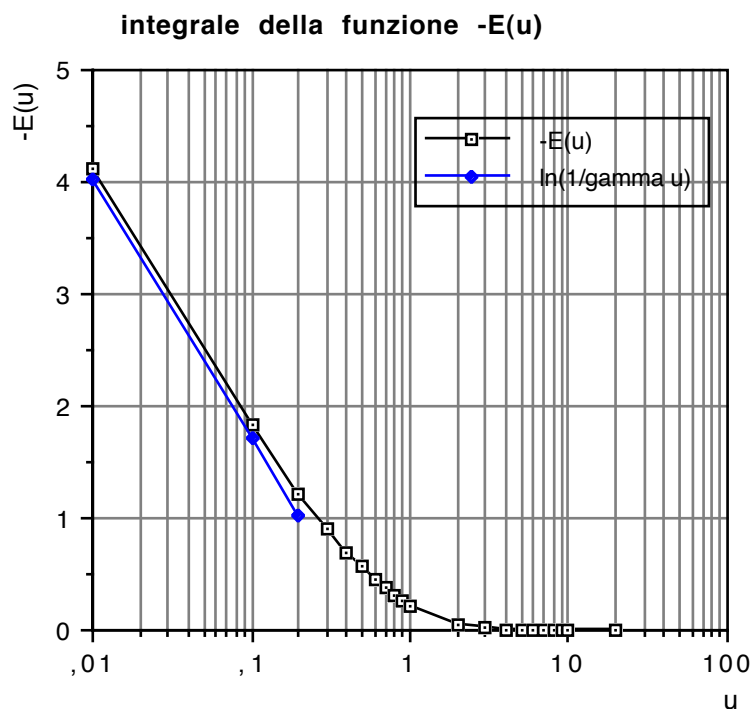


fig. 15 - grafico della funzione -E(u)

Se u è molto piccolo allora:

$$[-E_i(u)] \Rightarrow \ln \frac{1}{\gamma u} \quad (149)$$

dove

$$\gamma = e^{0,577} = 1,781$$

e segue che, in generale :

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi T} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (150)$$

o, che è lo stesso:

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi T} [-E_i(u)] \quad (152)$$

mentre per u piccolo, avremo, in via approssimativa:

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi T} \ln \left(\frac{4St}{\gamma r^2} \right) \quad (153)$$

12.1.2.4 Il pozzo freatico singolo in regime non permanente

Quanto già determinato nel precedente paragrafo prescinde dalla integrazione di T, che quindi non incide nella soluzione finale (150) e seguenti, dunque sostituendo a T il prodotto K H, avremo:

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi K H} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (150')$$

o, che è lo stesso:

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi K H} [-E_i(u)] \quad (152')$$

mentre per u piccolo, avremo, in via approssimativa:

$$\xi = \frac{Q}{4 \pi K H} \ln \left(\frac{4St}{\gamma r^2} \right) \quad (153'')$$

12.1.2.5 Le trincee

L'idraulica delle trincee è analoga a quella dei pozzi. Noi ci soffermeremo solo sullo studio nelle ipotesi del Du Puit e ciò in quanto queste opere di captazione hanno oggi scarso interesse.

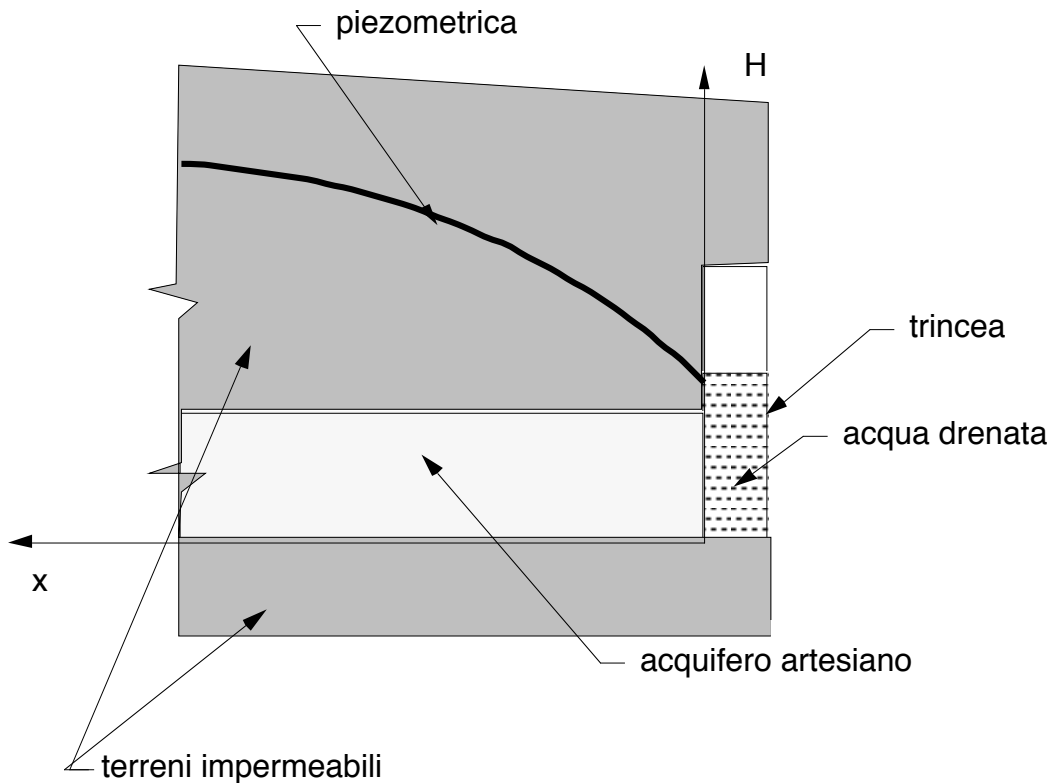


fig. 16 - schema di trincea drenante

Assumendo l'asse delle ascisse come in figura precedente la (75) si riduce alla:

$$\frac{d}{dx} T \frac{dH}{dx} = Q^* \quad (154)$$

e

$$Q^* = \frac{dq}{dy} \quad (155)$$

ma $dx = dy$, segue

$$Q^* = \frac{dq}{dx} \quad (156)$$

quindi

$$T \frac{dH}{dx} = q \quad (157)$$

che integrata da:

- a) nel caso di falda artesiania

$$q = T \frac{h_i - h_t}{R_a} \quad (158)$$

- b) nel caso di falda freatica (fig. 13):

$$q = \frac{K}{2R_a} (h_i^2 - h_t^2) \quad (159)$$

12.1.2.6 Altre soluzioni

In quanto segue sono riportate altre soluzioni analitiche delle equazioni (75) e (76), che possono essere provate con più o meno banali calcoli.

- a) sorgente o pozzo uniforme, in coordinate cartesiane

$$\varphi = \frac{\pm q}{4 \pi K} \ln (x^2 + y^2)$$

- b) sorgente o pozzo uniforme, in coordinate cilindriche

$$\varphi = \frac{\pm q}{4 \pi K} \ln (r)$$

- c) sorgente o pozzo lineare lungo l'asse z e di lunghezza c, in coordinate cartesiane

$$\varphi = \frac{\pm Q}{4 \pi K c} \ln \left\{ \frac{z + c + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + c)^2}}{z - c + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}} \right\}$$

- d) sorgente o pozzo lineare lungo l'asse z e di lunghezza c, in coordinate cilindriche

$$\varphi = \frac{\pm Q}{4 \pi K c} \ln \left\{ \frac{z + c + \sqrt{r^2 + (z + c)^2}}{z - c + \sqrt{r^2 + (z - c)^2}} \right\}$$

dove φ è il valore del potenziale, cioè della posizione della piezometrica su di un piano di riferimento orizzontale.

12.2 L'integrazione delle equazioni indefinite in termini numerici

12.2.1 La discretizzazione alle differenze finite

L'impossibilità di risolvere analiticamente le (75) con le relative condizioni al contorno su domini affatto generali impone la ricerca di soluzioni approssimate.

Queste, come è noto, possono essere ricercate con vari metodi, tra questi qui si fa riferimento al metodo delle differenze finite.

Allo scopo si sovrappone al dominio, fig. 17, una rete a maglia quadrata (l'uso di maglie diverse è possibile) e si sostituisce nella (75) al posto dei simboli di derivazione quelli del rapporto incrementale.

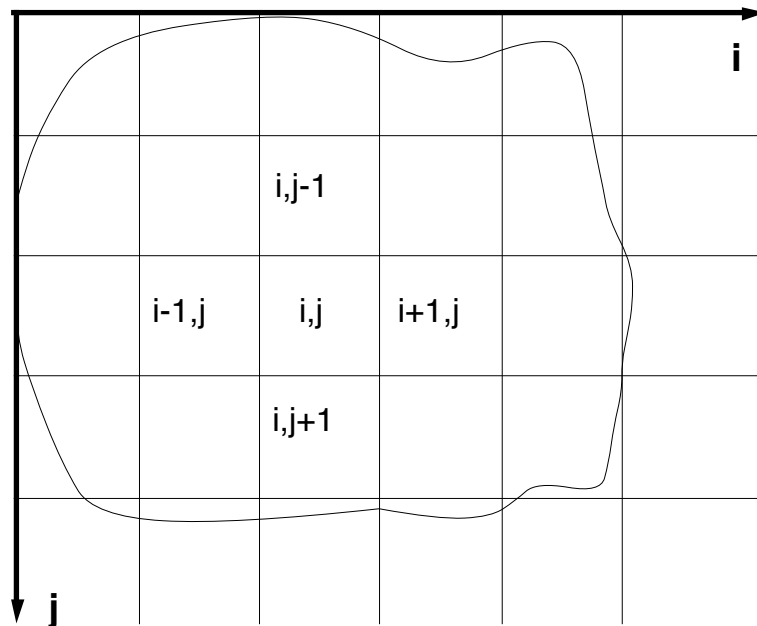


Fig. 17 - Discretizzazione alle differenze finite

Ne segue che per ciascuna maglia i, j avremo una equazione del tipo:

$$\Delta (-T_X \Delta H) + \Delta (-T_X \Delta H) = q_{i,j} - \frac{S_{i,j} \Delta x^2}{\Delta t} \left(H_{i,j}^{t_n} - H_{i,j}^{t_{n-1}} \right)$$

e queste rappresentano la media dei valori delle trasmissività relative alle maglie di cui si eseguono le differenze ΔH .

Posto poi:

$$Q_{i,j} = q_{i,j} \Delta x^2$$

e

$$C_{i,j} = \frac{S_{i,j} \Delta x^2}{\Delta t}$$

ed esplicitando le differenze a primo membro che ovviamente vanno calcolate tra le quattro maglie che la circondano e la i, j-esima avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{x_{i,j-1}} + T_{x_{i,j}}}{2} H_{i,j-1} + \frac{T_{x_{i,j+1}} + T_{x_{i,j}}}{2} H_{i,j+1} + \frac{T_{y_{i-1,j}} + T_{y_{i,j}}}{2} H_{i-1,j} + \frac{T_{y_{i+1,j}} + T_{y_{i,j}}}{2} \\ & H_{i+1,j} - \\ & \frac{T_{x_{i,j-1}} + T_{x_{i,j+1}} + T_{y_{i+1,j}} + T_{y_{i-1,j}} + 2(T_{x_{i,j}} + T_{y_{i,j}})}{2} H_{i,j} = \\ & = - Q_{i,j} + C_{i,j} (H_{i,j}^t - H_{i,j}^{t-1}) \end{aligned} \quad (160)$$

il primo membro della (160) presenta cinque incognite, esattamente la H relativa alla maglia per cui è stata scritta l'equazione e le H relative alle maglie circostanti, queste ultime hanno per coefficienti la media dei valori delle trasmissività delle maglie interessate.

Il coefficiente della H relativa alla maglia di cui si scrive l'equazione è pari all'opposto della somma degli altri coefficienti del primo membro della stessa equazione.

12.2.2 Le condizioni al contorno, in termini di differenze finite.

Per il primo dei casi esaminati nel paragrafo 10.3, maglia di bordo con potenziale noto (o condizione di Dirichlet), è ovviamente inutile scrivere l'equazione. Le implicazioni della presenza di una maglia a potenziale noto sono tutte nelle equazioni relative alle maglie che la circondano e contribuiscono a fornire i termini noti del sistema che vanno portati al secondo membro.

Per il secondo caso, cioè per maglie di bordo a flusso noto (o condizione di Neumann) andrà scritta la (160) che conterrà, però, a primo membro solo tante incognite quante sono le maglie del dominio che ne sono a contatto ed il coefficiente dell'incognita relativo alla maglia stessa sarà ancora pari all'opposto della somma degli altri coefficienti.

Ciò impone automaticamente la condizione al contorno nel caso che il flusso noto sia nullo, infatti con riferimento alla fig. 18

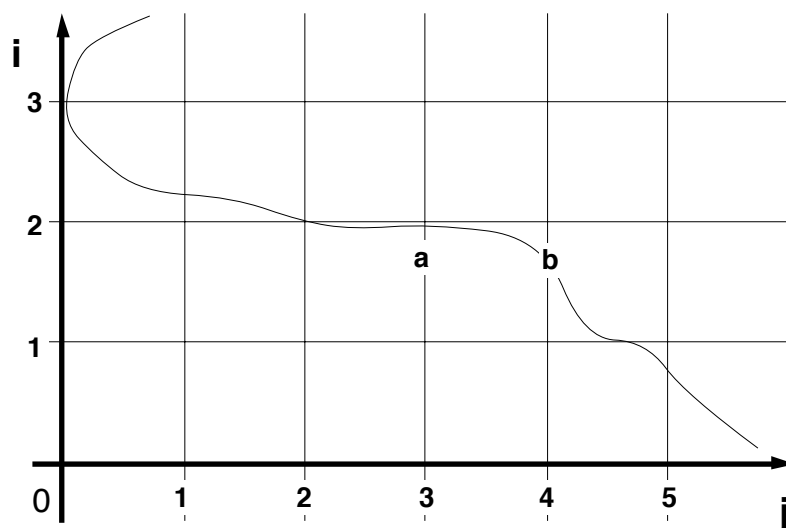


Fig. 18 - discretizzazione in prossimità della frontiera del dominio

dove supponiamo che la maglia 3, 4 abbia sul lato (a,b) flusso nullo, tenuto presente che:

$$\cos \alpha = - 1;$$

$$\text{sen } \alpha = 0$$

della (92) segue la:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

e discretizzando avremo:

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = 0$$

da cui

$$H_{2,4} - H_{3,4} = 0$$

e facendo sistema tra quest'ultima e la (61), dopo aver introdotto la maglia fittizia (2,4), nell'ipotesi - non necessaria - di isotropia:

$$\begin{aligned} \frac{T_{3,3} + T_{3,4}}{2} (H_{3,3} - H_{3,4}) + \frac{T_{3,5} + T_{3,4}}{2} (H_{3,5} - H_{3,4}) + \frac{T_{4,4} + T_{3,4}}{2} (H_{4,4} - H_{3,4}) \\ + \frac{T_{2,4} + T_{3,4}}{2} (H_{2,4} - H_{3,4}) = Q_{3,4} - C_{3,4} (H_{3,4}^{t_n} - H_{3,4}^{t_{n-1}}) \end{aligned} \quad (161)$$

segue che si annulla l'ultimo addendo del primo membro.

Allo stesso risultato si perviene se, anzichè introdurre la maglia fittizia (il che comporta la scrittura di una equazione in più) si annulla il relativo coefficiente, cioè

$$\frac{1}{2} (T_{2,4} + T_{3,4}) = 0$$

della quale si deduce che:

$$T_{2,4} = - T_{3,4}$$

ed in conseguenza la (160) per la maglia in esame diventa

$$\begin{aligned} \frac{T_{3,3} + T_{3,4}}{2} H_{3,3} + \frac{T_{3,5} + T_{3,4}}{2} H_{3,5} + \frac{T_{4,4} + T_{3,4}}{2} H_{4,4} \\ + \frac{T_{3,3} + T_{3,5} + T_{4,5} + 3T_{3,4}}{2} H_{3,4} = \\ = Q_{3,4} - C_{3,4} (H_{3,4}^{t_n} - H_{3,4}^{t_{n-1}}) \end{aligned} \quad (162)$$

e ciò dimostra l'asserto.

Se invece il flusso noto è nullo basterà che nella (160), nella forma già vista per il caso di flusso nullo, si aggiunga al termine $Q_{i,j}$ il flusso noto.

Ciò si prova in maniera analoga a quanto visto e il flusso nullo. Il metodo di utilizzare una maglia fittizia è riconducibile al noto metodo delle immagini.

12.2.3 Sintesi matriciale

Tutte le equazioni che gestiscono in termini finiti il deflusso delle acque sotterranee sono lineari nelle N incognite H . Se ora pensiamo di scrivere ciascuna delle M equazioni che compongono il sistema, con tutte le M incognite, ordinandole, per tutte le equazioni sempre nello stesso modo, e ciò evidentemente si otterrà ponendo in ciascuna equazione pari a zero i coefficienti delle incognite che nelle equazioni originarie non vi compaiono potremmo raggruppare i coefficienti dei primi membri in una matrice quadrata di ordine $M \times M$ che indicheremo con \mathbf{A} ed in cui generico elemento sarà $a_{m,n}$.

Indichiamo poi con \mathbf{X} il vettore colonna delle incognite, siano esse di tipo H o Q^* ;

Inoltre indichiamo con \mathbf{B} il vettore colonna costituito dai termini noti e con \mathbf{C} la matrice (diagonale) dei coefficienti delle incognite a secondo membro.

Il sistema potrà dunque essere sintetizzato nella espressione matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{C} (\mathbf{X}^t - \mathbf{X}^{t-1}) \quad (163)$$

La matrice \mathbf{A} gode delle seguenti proprietà:

- I. E' una matrice espressa (cioè con molti termini nulli) infatti i coefficienti diversi da zero sono al più cinque, e tenendo conto che in generale:

$$M \gg 5$$

segue l'asserto.

- II. Ha diagonale principale dominante, infatti i coefficienti del tipo

$$a_{i,i}$$

sono in valore assoluto molto maggiori degli altri, ed in particolare sussiste la relazione

- III. E' simmetrica, cioè:

$$a_{m,n} = a_{n,m}$$

La \mathbf{X} che compare a primo membro della (65) può, nella logica delle differenze finite assumere il valore al tempo t_n od al tempo t_{n-1} od ad un tempo intermedio tra i due.

In particolare se si ammette che ciascuna delle $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ ha sufficienti caratteristiche di regolarità e ciò evidentemente si verifica tanto più facilmente quanto più piccolo è Δt , allora avremo che

$$\mathbf{X} = (1 - \theta) \mathbf{X}^{t_{n-1}} + \theta \mathbf{X}^{t_n} \quad (164)$$

con θ (scalare) tale che sia soddisfatta la :

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Ne segue che per:

$\theta = 1,$	\mathbf{X} assumerà il valore all'istante t_n (metodo implicito)
$\theta = 0,$	\mathbf{X} assumerà il valore all'istante t_{n-1} (metodo esplicito)
$0 < \theta < 1,$	\mathbf{X} assumerà un valore intermedio a quello relativo ai tempi t_n e t_{n-1}

Sostituendo ora la (28) nella (27) ed ordinando, segue la:

$$\mathbf{D} \mathbf{X} = \mathbf{E} \quad (165)$$

dove si è posto:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \theta - \mathbf{C} \quad (165')$$

ed

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} - [\mathbf{A}(1 - \theta) + \mathbf{C}] \mathbf{X}^{t_{n-1}} \quad (165'')$$

la cui risoluzione da soluzione al problema non-stazionario del moto delle acque filtranti;

E' facile verificare che la matrice \mathbf{D} gode delle stesse proprietà della matrice \mathbf{A} .

12.3 La soluzione tramite il metodo delle trasformate conformi

Si è già visto che una funzione complessa di variabile complessa che sia monogena (cioè che risponda alle condizioni di monogeneità di CAUCHY-RIEMANN) è anche soluzione di alcuni importanti casi di problemi di filtrazione o meglio di quei casi che possono ricordarsi ad un problema di LAPLACE

Si considerino le due funzioni ϕ e Ψ di x ed y ; ad ogni punto del piano z corrisponde una coppia di valori di ϕ e Ψ

E' possibile immaginare la funzione analitica:

$$w = \phi + i \Psi, \quad (166)$$

che abbia come codominio un secondo piano con coordinate cartesiane r ed s ; cioè tale che ogni suo punto Q può essere rappresentato dal numero complesso $t = r + i s$ e per questo tale piano verrà detto piano t .

Avremo

$$w = \phi(z) + i \Psi(z), \quad (167)$$

che può essere espressa come funzione di t

$$w = \phi(t) + i \Psi(t) \quad (168)$$

Ovviamente per quanti visto nel § 11 risultano soddisfatte le condizioni di analiticità, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (169)$$

Si è anche visto che, rispetto ad x ed y , le ϕ e Ψ sono armoniche, come pure che, nel piano $\{x, y\}$, le linee $\phi = \text{cost}$ e $\Psi = \text{cost}$ sono tra loro ortogonali. ed analogamente che le ϕ e Ψ sono armoniche anche rispetto ad r ed s e che nel piano $\{r, s\}$ le linee $\phi = \text{cost}$ e $\Psi = \text{cost}$ sono pure tra loro ortogonali.

Tutto ciò può essere riassunto nel modo seguente.

Se ai punti P del piano z con coordinate $\{x,y\}$ si fanno corrispondere punti Q di altro piano t con coordinate r, s secondo una correlazione analitica, cioè si pone:

$$x = x(r,s) \tag{170}$$

$$y = y(r,s)$$

con le condizioni:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial s} \tag{171}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial r}$$

le funzioni ϕ e Ψ del piano z si trasformano in funzioni ϕ e Ψ del piano t conservando la caratteristica di essere armoniche, come pure quella dell'intersecarsi ad angolo retto delle linee $\phi = \text{cost}$ e $\Psi = \text{cost}$.

La trasformazione di tale genere delle funzioni ϕ e Ψ dal piano z al piano t dicesi *trasformazione conforme*.

Si supponga a ora di conoscere le funzioni ϕ e Ψ in un piano t, e in particolare il reticolo di linee $\phi = \text{cost}$ e $\Psi = \text{cost}$, costituenti soluzioni di un problema di filtrazione per un campo del moto di una determinata forma e per un certo insieme di condizioni al contorno; se a tale piano t si applica una trasformazione analitica, si ottengono in un nuovo piano z le funzioni ϕ e Ψ e in particolare la distribuzione di linee $\phi = \text{cost}$ e $\Psi = \text{cost}$, che costituiscono ancora, in quanto soddisfano anche nel nuovo piano alle condizioni fondamentali, **soluzione di un problema di filtrazione**, peraltro relativamente ad un campo di moto di diversa forma e per condizioni al contorno diverse.

Applicando dunque delle trasformazioni conformi \mathbf{C}_1 alla distribuzione di ϕ e Ψ , relativa ad una situazione di moto di filtrazione \mathbf{A} relativa a determinati dominio e condizioni al contorno, si ottengono altre diverse distribuzioni di ϕ e Ψ relative a moti di filtrazione per situazioni diverse \mathbf{B}_1 .

Nella pratica tuttavia il problema si pone in termini un po' diversi infatti sovente si ha la necessità di determinare le caratteristiche del moto per una data situazione \mathbf{B} .

Pertanto deve scegliersi:

- 1) una soluzione delle equazioni di moto che sia nota e che quindi indichiamo con **A**,
- 2) una trasformazione **C** che trasforma **A** in **B**;

Il metodo ancorché geniale ed interessante, subisce delle grosse limitazioni per le difficoltà proprio a causa delle difficoltà di operare le scelte di cui sopra.

Esaminiamo qui di seguito dapprima alcune soluzioni note e quindi alcune delle più comuni trasformazioni.

12.3.1 Alcune soluzioni note

Si riportano alcune delle soluzioni che possiamo assumere come *note* cioè del tipo **A** alle quali applicare delle trasformazioni **C**:

- a) moto lineare nel piano $\{r,s\}$ in direzione di r (o di s)

Le funzioni:

$$\begin{aligned}\Phi &= Q_u r \\ \Psi &= Q_u s\end{aligned}\tag{172}$$

dove Q_u è una costante (uguale alla portata per unità di lunghezza), sono evidentemente armoniche ed analitiche; le relative linee equipotenziali e di flusso sono rette rispettivamente parallele all'asse s ed all'asse r ; esse costituiscono soluzione di un moto filtrante parallelo all'asse r e che ha come condizioni al contorno: $\phi = \text{costante}$ lungo qualsiasi retta parallela all'asse s ; velocità ovunque parallela all'asse r , come rappresentato nella figura che segue:

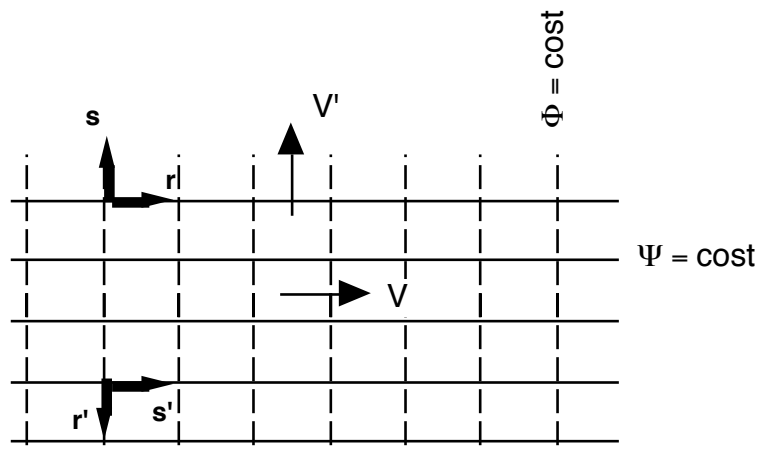


Fig. 19 - moto piano

Ovviamente, per quanto visto in precedenza anche le funzioni:

$$\phi = Ks \tag{173}$$

$$\Psi = -K r$$

costituiscono soluzione di un moto analogo al precedente ma parallelo all'asse s

b) moto nel piano {r,s} convergente in direzione di un punto O

Le funzioni riferite a coordinate polari ρ e φ :

$$\phi = \pm \frac{Q_u}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \tag{174}$$

$$\Psi = \mp \frac{Q_u}{2\pi} \varphi$$

sono anche esse armoniche e analitiche, e quindi soluzioni dell'equazione di LAPLACE

In esse Q_u (portata totale) e ρ_0 sono due costanti; le relative linee equipotenziali sono cerchi e le linee di flusso sono rette uscenti dal polo; esse costituiscono soluzione di un moto del moto di filtrazione radiale, centrifugo o centripeto illustrato in figura.

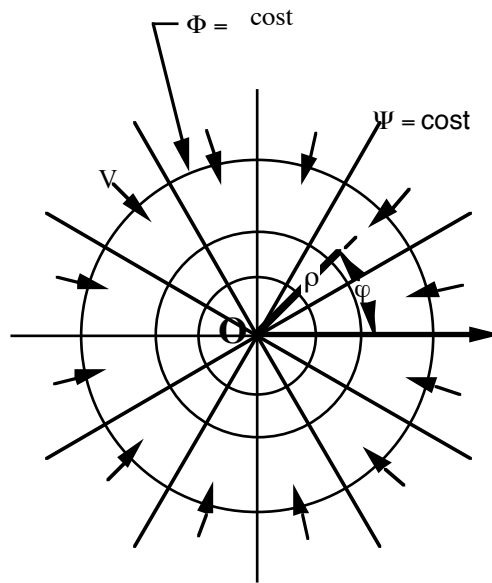


Fig. 20 - moto lineare convergente

12.3.2 Le trasformazioni più usuali

In quanto segue si riportano le trasformazioni più usuali, l'argomento è molto importante ed affascinante perché schiude le porte ad un vasto campo della idrodinamica e più in generale della fluidodinamica, infatti con questi mezzi si può studiare la portanza di un profilo alare, fondamentale in aeronautica e nel contempo la deportanza degli stessi, fondamentale nello studio dei veicoli terrestri veloci, ed in particolare delle autovetture da corsa del tipo delle Formula 1, tuttavia essendo il presente contesto riferito alle acque sotterranee si tralasciano tali interessanti aspetti rinviando chi voglia approfondirli a specifici testi di idrodinamica.

Le trasformazioni che seguono rappresentano, nel piano z , cioè $\{x,y\}$ i tipi di moto qui a lato indicati.

$z = At$	flusso uniforme
$z = \frac{Q}{2\pi} \ln(t-a)$	flusso da o verso un punto (pozzo o sorgente) sito nel punto $z=a$
$z = -\frac{i K}{2\pi} \ln(t-a)$	flusso intorno ad un vortice (irrotazionale) con centro in $z = a$ (con, ovviamente, $i = \sqrt{-1}$)

$$z = \left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{iK}{2\pi} \right) \ln(t-a)$$

flusso vorticoso (irrotazionale) a spirale²⁴ intorno al punto $z = a$

$$z = \frac{\mu}{t-a}$$

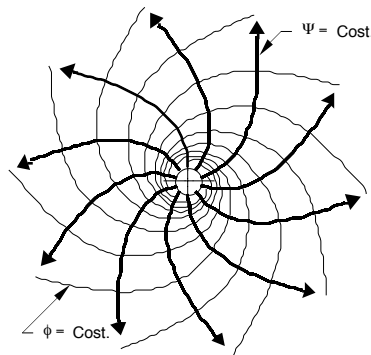
flusso dipolare²⁵

$$z = m \ln \frac{t+a}{t-a}$$

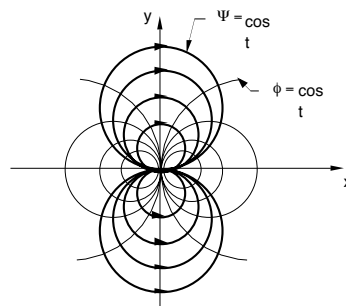
$$z = At^n$$

$$t = c \cosh z$$

24 Un tale flusso è quello illustrato nella figura seguente



25 Il flusso dipolare, invero non facilmente realizzabile nelle acque sotterranee consiste in una sorta di doppio vortice, del tipo di quello qui rappresentato.



cui rispondono le seguenti equazioni:

$$\varphi = \frac{\mu \cos \theta}{r}$$

$$\psi = -\frac{\mu \sin \theta}{r}$$

$$z=U\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$$

$$z=U\left(t+\frac{a^2}{t}\right)-\frac{iK}{2\pi}INt$$

12.3.3 Esempio di utilizzo delle trasformate conformi.

Un interessante esempio di utilizzo del metodo della trasformazione conforme è lo studio moto nel piano $\{r,s\}$ lungo traiettorie ellittiche o iperboliche

Si faccia ad riferimento ad un canale in cui fondo e permeabile. Da esso le acque si infiltrano nel sottosuolo, secondo lo schema rappresentato nella figura che segue.

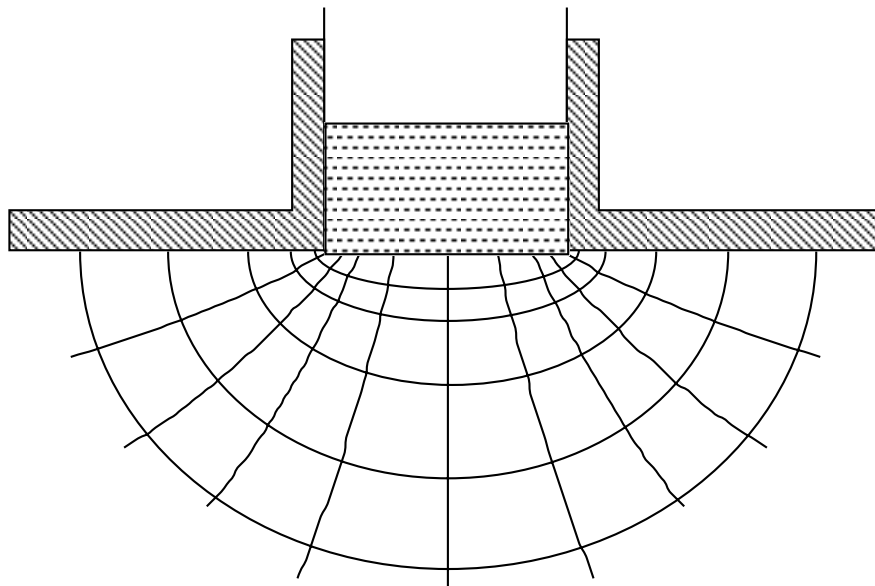


Fig. 21 - moto di filtrazione da un canale

I potenziali delle linee di corrente e delle linee di flusso risponde alle seguenti equazioni che sono dunque soluzioni della (75)

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \phi} + \frac{y^2}{\sinh^2 \phi} = a^2 \quad (175)$$

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \Psi} - \frac{y^2}{\sinh^2 \Psi} = a^2$$

Cioè le linee equipotenziali (valori costanti di ϕ) sono delle ellissi confocali mentre le linee di fusso (valori costanti di Ψ) sono rappresentate da una famiglia di iperboli confocali.

Si assuma quale soluzione nota **A** la soluzione di un moto parallelo:

$$\phi = r$$

(176)

$$\Psi = s$$

e si applichi ad esso la trasformazione:

$$z = (x+iy) = a \cosh t = a \cosh (r + is) \quad (177)$$

dove a è una costante; cioè:

$$x + iy = a \cosh (r + is) = a [\cosh r \cos s + i \sinh r \sin s] \quad (177')$$

o, che è lo stesso:

$$x = a \cosh r \cos s \quad (177'')$$

$$y = a \sinh r \sin s$$

Tale trasformazione è analitica; infatti:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = a \sinh r \cos s, \quad (178')$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -a \cosh r \sin s, \quad (178'')$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = a \cosh r \sin s, \quad (178''')$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = a \sinh r \cos s, \quad (178^{iv})$$

per cui le condizioni di CAUCHY-RIEMANN sono soddisfatte.

Le funzioni ϕ e Ψ nel piano $\{x, y\}$ risultano dunque determinate dalle:

$$x = a \cosh \phi \cos \Psi \quad (179)$$

$$y = a \sinh \phi \sin \Psi$$

seguono quindi le (175)

Applicando ora la stessa trasformazione alla soluzione di moto parallelo

$$\phi = s, \quad (180)$$

$$\Psi = -r,$$

si perviene ancora alle (175) ma con scambio di Ψ con ϕ ; quindi le iperboli risultano linee equipotenziali e le ellissi linee di flusso della nuova situazione di moto

La figura che segue rappresenta la rete delle due famiglie di linee equipotenziali e di flusso che sono la trasformazione, sempre secondo le (177) della soluzione(180)

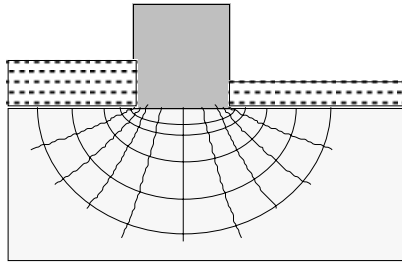


Fig. 22 - moto di filtrazione sotto uno sbarramento impermeabile

12.4 La soluzione tramite metodi grafici

Sino a pochi decenni fa il calcolo in ingegneria era quasi esclusivamente grafico: così erano verificati archi, ponti, gallerie, copole, dighe e strutture di ogni genere.

Ovviamente anche in campo idraulico il calcolo grafico aveva larghi spazi, per esempio per la valutazione delle sovrappressioni nel colpo d'ariete, per il calcolo delle oscillazioni di massa nei pozzi piezometrici ecc..

Pertanto non c'è da stupirsi se anche i problemi delle acque sotterranee sono stati affrontati con tali metodi.

Peraltro non è solo per motivi storici che viene svolto il presente paragrafo ma perché:

- 1) anche oggi in epoca in cui il calcolo grafico è stato messo ormai da parte dall'avanzare dei metodi numerici supportati da mezzi informatici, hanno comunque un senso, se non altro per soluzioni di prima approssimazione o per verificare ordini di grandezza od ancora per impostare correttamente metodi numerici;
- 2) perché comunque è indubbiamente utile una visione geometrica dei fenomeni che si verificano nei moti di filtrazione.

I metodi grafici consistono nel tracciare la rete ortogonale di curve equipotenziali ($\Phi = \text{cost}$) e di corrente ($\Psi = \text{cost}$)

12.5 La soluzione tramite metodi analogici, l'analogia reoelettrica, l'analogia elettrostatica, l'analogia termica.

Poiché anche in altri campi della fisica-matematica valgono le (75), per esempio nei fenomeni reoelettrici, in elettrostatica, nella trasmissione del calore ecc...è ovvio che una soluzione valida in uno qualsiasi di tali campi è valida anche negli altri.

NE segue quindi che per studiare un problema di acque sotterranee non facilmente riproducibile in laboratorio con dei modelli fisici, si ricorra a modelli sempre fisici ma non del fenomeno in esame (filtrazione) bensì di fenomeni *analoghi*, cioè che rispondono formalmente alle medesime leggi fisiche e che sono più facilmente riproducibili in laboratorio.

La più semplice di tali analogie è quella con i conduttori elettrici.

L'intensità \mathbf{i} di corrente elettrica che percorre un conduttore di resistività ρ in un campo di tensioni $U(x,y,z)$ è data dalla legge di Ohm generalizzata :

$$\mathbf{i} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } U \quad (10)$$

dove \mathbf{i} è un vettore come pure lo è il grad U , mentre ρ è uno scalare.

La (10) è quindi del tutto analoga alla (19") e quindi alle (35) e (36).

È ovvio che anche per la corrente elettrica valga, in condizioni di permanenza e di assenza di pozzi o di sorgenti, la:

$$\text{div}(\mathbf{i}) = 0 \quad (11)$$

e dunque che si abbia

$$\Delta^2 U = 0 \quad (111)$$

PARTE II

GLI ALGORITMI USUALI NEI PROBLEMI DELLE ACQUE SOTTERRANEE

Tutti i problemi di Ingegneria sono legati non tanto allo studio, già di per se importante della semplice conoscenza delle leggi della fisica-matematica che governano un determinato fenomeno quanto a quello più concreto di utilizzare le leggi al fine di pervenire alla soluzioni di problemi tecnici.

Nel caso delle acque sotterranee i problemi tecnici possono essere molteplici e molti di essi possono essere studiati riconducendoli a problemi piani

1.2.1.2 I gruppi di pozzi*

1.2.1.2.1 I pozzi sparsi, idraulica *

1.2.1.2.2 I pozzi sparsi, il teorema di reciprocità*

Per i problemi di gestione può essere molto utile il seguente principio di reciprocità, valido per un gruppo di pozzi artesiani, ma estendibile con piccole varianti ai pozzi freatici:

"Se in una falda artesianica sono praticati n pozzi, si supponga che vengano attuati successivamente due diversi regimi di erogazione, allora la somma dei prodotti delle portate del primo regime per le depressioni piezometriche prodotte dal secondo regime (nello stesso pozzo) è uguale alla somma dei prodotti delle portate del secondo regime per gli abbassamenti provocati dal primo".

Si omette, in questa sede, la dimostrazione che può essere studiata su vari testi di idraulica (per esempio Ruggiero, Scimeni, ecc....).

1.2.1.2.3 I pozzi allineati*

1.2.1.3 Considerazioni sul raggio d'azione del pozzo singolo

Il raggio d'azione è una grandezza variabile da qualche decina di metri a qualche centinaio in funzione dei vari fattori quali la permeabilità, l'entità del pompaggio, ecc... . Fortunatamente le incertezze derivanti dalla difficoltà di stabilire a priori il raggio d'azione sono parzialmente superate dal fatto che detta grandezza compare nelle (136) e (137) sotto logaritmo, anzi si può porre, senza commettere grandi errori

$$\frac{\pi}{\log_n \left(\frac{R_a}{r_p} \right)} = 0,5$$

Infatti, come è dimostrato nell'Idraulica del Ruggiero per

$$\frac{R_a}{r_p} = 100$$

si ha

$$\frac{\pi}{\log_n \left(\frac{R_a}{r_p} \right)} = 0,682$$

e per

$$\frac{R_a}{r_p} = 200$$

si ha

$$\frac{\pi}{\log_n \left(\frac{R_a}{r_p} \right)} = 0,4$$

Segue, da quanto sopra, che il raggio del pozzo sarà poco influente sulla sua portata e da ciò la convenienza ad aumentare il numero dei pozzi anzichè il loro diametro per estrarre maggior quantità d'acqua.

Pertanto posto:

$$h_i - h_f = \delta \tag{138}$$

la (137) diventa:

$$Q = K \delta \tag{139}$$

Le ipotesi del Du Puit poco rispondono all'effettivo funzionamento di un pozzo: in particolare la prima, che implica la costanza non solo della portata emunta, ma anche del raggio d'azione, e la settima;

Tuttavia i risultati ottenuti secondo la teoria del Du Puit non si discostano molto dalla realtà, inoltre detta trattazione è molto semplice. Per tali motivi essa mantiene ancora la sua validità, sia pure entro i precisi limiti del moto permanente (almeno nel senso della portata costante). Con le stesse ipotesi possono essere studiati anche gruppi di pozzi.

1.2.1.4 Considerazioni circa il pozzo singolo in acquifero in moto stazionario

1.2.2 I pozzi artesiani in regime non permanente

1.2.3 Idraulica dei pozzi con drenaggio orizzontale

E' un'idraulica piuttosto complessa e non del tutto definita.

Vedi fig. 10 in appendice

Poichè questo tipo di pozzo, che ha riscontrato grandi favori in Francia, non è ancora da noi molto diffuso ci limitiamo a dare solo la seguente formula per pozzi artesiani:

$$Q = 2\pi Ks \frac{h_i - h_p}{\log_n \left(\frac{R_a}{\left(\frac{c}{\sqrt[4]{n}} \right)} \right) + f(n) \frac{s}{c} \log_n \left(\frac{S}{2\pi r_d} \frac{1}{\text{sen} \left(\frac{\pi a}{s} \right)} \right)} \quad (108)$$

con:

- c lunghezza dei dreni;
- r_d raggio del dreno orizzontale;
- n numero dei dreni orizzontali;
- a altezza dei dreni dal fondo impermeabile;
- s spessore dell' acquifero

ed

$$f(n) = \frac{1}{2n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)} \quad (109)$$

e con ovvio significato degli altri simboli.

La (108) "mutatis mutandis" vale anche per la falda freatica.

1.2.4 I pozzi freatici in regime permanente

Ancorché meno importati per l'approvvigionamento idrico perché meno protetti, rivestono però comunque grande rilevanza per altri usi i pozzi praticati in falde freatiche, d'altronde non sempre è possibile definire con esattezza se un' acquifero sia freatico od artesiano, di fatti a seconda delle località potrebbe essere e l'uno e l'altro.

Dunque è necessario conoscere l'Idraulica dei pozzi praticati in tali mezzi.

1.2.4.1 Il pozzo singolo

Nel caso di falda freatica, la potenza della falda dipende dalla sua piezometria, in particolare per distanze dal pozzo inferiori al raggio d'azione, detto spessore dipende dall'emungimento Pertanto nella (91) $T=Ks$ non sarà più una costante (con H) in quanto non sarà più tale s, che invece varierà con H verificandosi in generale la:

$$s = s_0 + H \quad (110)$$

con s_0 eventuale differenza di quota tra la base della falda ed il piano di riferimento di H.

Si noti che alle stesse espressioni (94) e (111) si può pervenire indipendentemente dalla (69) o (70). Si vedano in proposito il Castany, lo Schneebli ed altri testi specifici.

Fig. 11 - vedi in appendice

1.2.5 Idraulica delle trincee.

1.3. Le misure di permeabilità e le prove di portata

Per vari fini è spesso necessaria la conoscenza della permeabilità:

- sfruttamento di uno o più pozzi;
- gestione dell' acquifero stesso;
- protezione dell' acquifero ;
- progettazione di opere sotterranee interferenti con l' acquifero;
- pura e semplice conoscenza dei dati, ecc.....

in tali casi è necessario ricorrere a misure di permeabilità.

A volte oltre la prova di permeabilità si esegue anche quelle di portata (del pozzo). La prima di tali prove, quella di permeabilità la si può eseguire :

- in laboratorio;
- in situ.

la seconda che è necessaria per controllare che il pozzo (o i pozzi) siano in grado di fornire la quantità d'acqua richiesta. va fatta in situ e consiste nel mettere in emungimento un pozzo (in generale tramite pompa) ed effettuare una serie di misure di portata e di livello.

Esaminiamo ora separatamente i due tipi di prove:

1.3.1 Prove di laboratorio

Viene adoperato un apparecchio chiamato permeometro che consente di misurare la quantità di acqua che attraversa una data sezione di materiale dello strato acquifero, prelevato dallo stesso strato e depresso sul permeometro.

Si pone il campione prelevato dal terreno in una provetta che può essere posta ad esempio verticalmente avendo cura di attribuire a tutto il sistema filtrante un grado di assestamento prossimo il più possibile a quello che il terreno aveva in posto.

Lo schema è simile a quello della figura 14; i serbatoi superiori ed inferiori sono muniti di sfioratore per mantenere il livello costante; quando sarà raggiunto un regime permanente verrà misurata la portata (costante) Q , sfiorante; allora conoscendo l'altezza L del filtro e misurando la perdita di carico H , si avrà

Fig 14 vedi appendice

$$J = \frac{H}{L}$$

e quindi

$$K = \frac{Q L}{\Omega H} \quad [\text{cm/s}] \quad (118)$$

dove Ω è la sezione orizzontale del filtro.

La K di solito viene espressa in [cm/s].

Con riferimento ora alla figura seguente

Fig. 15- vedi appendice

tenendo presente che

$$Q = - \frac{dH}{dt} \omega \quad (119)$$

dove ω è la sezione del tubo di alimentazione (vedi figura 15) e sostituendo nelle 118 avremo

$$K = - \frac{L \omega}{H \Omega} \frac{dH}{dt} \quad (120)$$

che può anche essere scritta nella forma

$$K = - \frac{\omega}{\Omega} L \frac{d}{dt} (\log_n H) \quad (121)$$

dette H_1, H_2, H_3 , le perdite di carico ai tempi t_1, t_2, t_3 si può costruire il grafico in scala semilogaritmica di figura 16.

figura 16 - vedi appendice

I punti (H,t) risulteranno pressochè allineati, infatti la (119) è l'espressione di una retta in un tale grafico; la permeabilità sarà dunque

$$K = \frac{s}{S} L 2,3 \frac{\log_{10} \frac{H_1}{H_2}}{T_2 - T_1} \quad (122)$$

Ciò permette una valutazione di K su uno stesso campione con regimi differenti e anche in condizioni di non permanenza.

La permeabilità K è, come è noto, una grandezza estremamente variabile, in funzione della granulometria e delle tessiture del mezzo poroso. A titolo puramente indicativo, si danno, nella tabella che segue alcuni valori della permeabilità espressi in [m/s], relativi ad alcuni frequenti tipi litologici:

sabbia finissima	K = 0.00001	[m/s]
sabbia fine	K = 0.00005	[m/s]
sabbia medi	K = 0.0004	[m/s]
sabbia grossa	K = 0.001	[m/s]
ghiaietta	K = 0.0005 ÷ 0.01	[m/s]

1.3.2 Prove in situ

Queste prove si suddividono in:

- a) misure di tipo puntuale
- b) misure non puntuali

1.3.2.1 Misure di tipo puntuale.

Si intende con prova puntuale quella che viene fatta su un sol pozzo (o talvolta un sol sondaggio) senza ausilio di altri pozzi o piezometri nei dintorni tramite i quali ottenere informazioni sul movimento delle acque nella falda durante le prove.

Possiamo distinguere in:

- prove in regime permanente

- prove in regime transitorio

e, nell' uno e nell' altro caso la falda potrà essere artesianiana o freatica.

1.3.2.1.1 Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianiana in regime permanente.

Lo schema più semplice prevede la ripetizione varie volte della prova di portata con erogazioni diverse, attendendo ogni volta che si stabilisca il regime quasi permanente (costanza dell'altezza d'acqua in un pozzo).

Sarà poi possibile costruire un grafico con in ascisse gli abbassamenti misurati ed in ordinata le rispettive portate.

I punti dovranno risultare pressochè allineati, per la (94), e la pendenza della retta fornirà la permeabilità del terreno. Ovvie le varianti al procedimento nel caso di falda freatica.

In generale queste misure si fanno secondo lo schema di figura 17 dove alla base del tubo è posto un filtro di lunghezza L e diametro D.

Fig. 17 - vedi appendice

La prova può essere fatta in regime permanente, cioè con altezza d'acqua costante nel pozzo, e con pompaggio o iniezione di una quantità d'acqua costante Q, o in regime variabile, cioè con acqua in risalita o in discesa nel pozzo.

Nel primo caso (**regime permanente**), se indichiamo con δ la differenza di carico totale corrispondente al dislivello prodotto tra il livello originario nel pozzo in condizioni di non emungimento e quello relativo alla portata emunta Q (costante) una volta stabilizzato, avremo per la (96) che la permeabilità sarà data dalla

$$K = m \frac{Q}{\delta} \quad (123)$$

dove m è il coefficiente che dipende dalla grandezza e dalla forma del filtro. Perché l'equazione (123) sia omogenea si attribuisce a m la dimensione $[L^{-1}]$.

Nel caso di filtro cilindrico posto sul fondo del sondaggio si può scrivere

$$m = \frac{\alpha}{D} \quad (124)$$

dove D è il diametro del filtro, L la sua altezza ed α un coefficiente di forma adimensionale dipendente dal rapporto L/D.

Il valore di m (e di α) si calcolano approssimativamente assimilando il filtro a una sfera di uguale superficie o a un ellissoide di rivoluzione di asse minore D e distanza focale L.

Si otterrà così per la sfera:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{L}{D} + \frac{1}{4}}} \quad (125)$$

e per l'ellissoide

$$\alpha = \frac{\log_n \left(\frac{L}{D} + \sqrt{\left(\frac{L}{D}\right)^2 + 1} \right)}{2\pi \frac{L}{D}} \quad (126)$$

Queste formule diventano:

$$\alpha = \frac{\log_n \left(\frac{2L}{D} \right)}{2\pi \frac{L}{D}} \quad (127)$$

per i valori $\frac{L}{D}$ abbastanza grandi (praticamente per $\frac{L}{D} \geq 4$) la differenza tra le due formule è inferiore a 1%.

Fig; 18 - vedi appendice

La formula della sfera (125) dà dei buoni risultati per valori di $\frac{L}{D}$ compresi tra 0 e $8 \div 10$.

La formula dell'ellissoide è applicabile a partire da $\frac{L}{D} = 1$.

Quando il filtro è nelle vicinanze di uno dei limiti della falda (superficie libera o superficie impermeabile) il coefficiente è maggiorato di un termine correttivo

$$\alpha' = \frac{1}{8\pi \left(\frac{\xi}{D}\right)} \quad (128)$$

dove ξ è la distanza dal centro del filtro alla superficie.

In generale è preferibile effettuare la prova di pompaggio piuttosto che quella di iniezione, infatti sperimentalmente si constata che il pozzo si riempie prima di quanto non si svuoti.

Inoltre non si rischia nelle prove di pompaggio di sottoporre il pozzo a delle pressioni eccessive come nel caso dell'iniezione d'acqua.

Se tali prove possono avere in certi casi una giustificazione occorrerà fare in modo da abolire l'installazione direttamente sul pozzo della pompa volumetrica (è necessario un tale tipo di pompa per le alte pressioni che occorre fornire all'acqua), infatti le pressioni elevate dovute ai colpi del pistone distruggono quasi in ogni caso e progressivamente il rivestimento del pozzo in particolare fuori dal filtro ed a contatto con l'acquifero.

Per verificare che la prova si svolga normalmente bisognerà farla e in fase crescente e poi decrescente e quindi con diverse Q.

I punti del grafico (Q, δ), devono allinearsi su una retta passante per l'origine.

Fig. 19 - vedi appendice

Nella figura 19 la retta (1) corrisponde ad una prova corretta.

Se invece si ottiene un ciclo di tipo (2), questo ci segnala che si è formato un percorso privilegiato probabilmente in seguito ad una rottura del rivestimento del pozzo.

Il ciclo (3) ci segnala o un intasamento del filtro o risalita di terreno nel pozzo (insabbiamento).

Converrà non tener conto delle curve (2) e (3) se si ha il sospetto che la permeabilità non corrisponde alla tangente alle curve per l'origine.

Se il terreno è molto permeabile il numero di Reynolds limite per la validità della legge di Darcy può essere superato; la curva $\delta = f(Q)$ presenta allora una concavità verso l'alto.

Per il calcolo della permeabilità bisognerà sempre prendere la tangente all'origine.

1.3.2.1.2 Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianica in regime di risalita.

Se il terreno è poco permeabile sarà indicato fare una prova di risalita del livello d'acqua nel pozzo. Per questo si vuota il pozzo d'acqua e si osserva la risalita: vediamo ora analiticamente l'espressione delle permeabilità da adottare in questa prova.

Se Ω è la sezione interna del tubo, la quantità entrante in un istante sarà:

$$Q = \Omega \frac{dH}{dt} \quad (129)$$

quindi tenuto conto che

$$d(\log_n H) = \frac{dH}{H} \Rightarrow dH = H d(\log_n H) \quad (130)$$

e che per la (123)

$$\frac{Q}{H} = \frac{k}{m} = \text{costante} \quad (131)$$

segue

$$\frac{Q}{H} = \Omega \frac{d}{dt} (\log_n H) = \frac{k}{m} = \text{costante} \quad (132)$$

che si può scrivere, dopo aver integrato:

$$k = m \Omega 2,3 \frac{\log_{10} \left(\frac{H_1}{H_2} \right)}{T_1 - T_2} \quad (133)$$

dove:

H_1 è il carico al tempo T_1

H_2 è il carico al tempo T_2

I differenti punti corrispondenti alle misure (H_n, T_n) devono allinearsi su un grafico $(\log H, t)$.

Per calcolare K con la formula (131) bisogna conoscere il nuovo livello statico della falda al fine di determinare H a partire dalla misura Z della profondità del livello d'acqua in genere misurata a partire dalla testata del tubo.

Ora se il terreno è realmente poco permeabile la stabilizzazione del livello nel pozzo può richiedere un tempo molto lungo, conviene allora operare nel seguente modo.

Siano Z_1, Z_2, \dots, Z_n le profondità corrispondenti ai tempi T_1, T_2, \dots, T_n .

Si calcola la derivata dz/dt in funzione di t, che praticamente si fa utilizzando l'espressione alle differenze finite.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Z_{n+1} - Z_{n-1}}{T_{n+1} - T_{n-1}} \quad (134)$$

per

$$T = T_n.$$

Si riportano poi su un grafico $\frac{dz}{dt} = f(z)$ i risultati ottenuti

prova di risalita

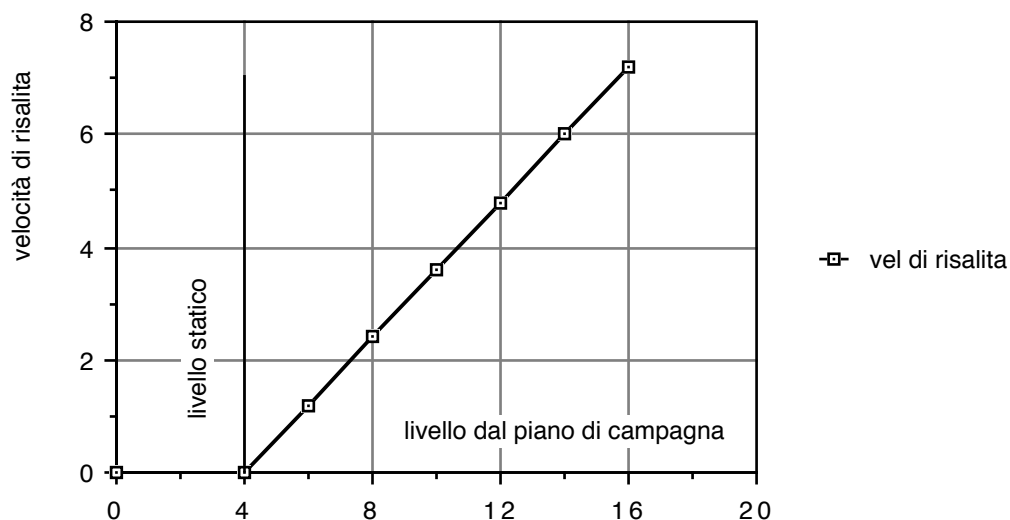


Fig.20 - prova di risalita

I punti dovrebbero allinearsi su una retta che taglia l'asse delle ascisse in Z_0 che corrisponde alla profondità del livello statico.

Si ha infatti

$$H = Z - Z_0$$

così che:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dZ}{dt}$$

ovvero:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q}{\Omega} = \frac{k}{mS} H$$

dunque:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{k}{m\Omega} (Z - Z_0)$$

e:

$$\frac{dZ}{dt} = 0$$

per

$$Z = Z_0$$

La prova a carico variabile può naturalmente farsi anche in senso inverso; si riempie il pozzo di acqua sopra il livello statico e si osserva la discesa del livello d'acqua nel pozzo.

Tuttavia questa prova presenta lo stesso inconveniente che quelle di iniezione di acqua.

Le prove puntuali hanno, come indica il loro nome, l'inconveniente di interessare solo una piccola parte di terreno situata intorno al filtro.

Ogni zona interviene con un peso tanto più grande quanto più è grande la pendenza piezometrica.

Può farsi una idea del *raggio di misura* considerando le superfici equipotenziali.

figura 21- vedi appendice

La figura 21 dà i meridiani di queste superfici ottenute per tre valori di $\frac{L}{D}$. Si può ammettere che il terreno situato all'esterno dell'equipotenziale 10% non ha più alcuna influenza sulle misure.

1.3.2.1.3 Caso di un sol pozzo, senza piezometri, in falda artesianica in regime di emungimento non permanente e relativa risalita.

Si è già visto nel paragrafo precedente 1.3.2.1.1 che nel caso classico di un pozzo traversante interamente la falda acquifera la prova teoricamente più idonea è quella del pompaggio in regime permanente.

Tuttavia questa prova spesso viene sostituita da quella in regime variabile poiché non sarà in generale possibile ottenere una veritiera stabilizzazione dei livelli.

Il dispositivo di esame comprende un pozzo finestrato su tutta l'altezza della falda e circondato da un certo numero di piezometri.

Si pompa dal pozzo per un certo tempo, che può durare anche qualche giorno una quantità costante e si effettuano a intervalli regolari delle misure degli abbassamenti dell'acqua nei piezometri che proseguono anche dopo l'arresto del pompaggio, si riportano poi queste misure in modo da ottenere la curva di discesa e risalita della falda.

Al tempo t dopo l'inizio del pompaggio, l'abbassamento, alla distanza r dal pozzo, è dato dalla

$$\xi = \frac{Q}{4\pi KH} [-E_1(-u)] \quad (133)$$

che, come già visto, contiene l'integrale logaritmico $-E_1(-u)$ dove $u = \frac{r^2}{4\alpha t}$ e che trovasi tabulato.

Come già osservato nel precedente paragrafo, in prossimità del pozzo e per piccoli valori di u , cioè dopo un tempo abbastanza lungo dall'inizio della prova, l'abbassamento può esser dato dalla formula approssimata:

$$\xi = \frac{Q}{4\pi KH} \log_n \left(\frac{4\alpha t}{\gamma r^2} \right) \quad (134)$$

Se si riporta in un grafico (fig. 22) l'abbassamento in un piezometro in funzione del logaritmo del tempo, i punti campioni si allineano per i tempi più lunghi su una retta. La pendenza di questa retta permette di determinare il prodotto K H.

Fig. 22 - vedi allegato

Si ha infatti

$$KH = \frac{Q}{4\pi(\xi_2 - \xi_1)} \log_n \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \quad (135)$$

Nel caso di pompaggio corrispondente alla figura 22 si ha:

$$KH = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 0,185} \cdot 2,3 \log_{10} \left(\frac{12}{4} \right) = 3,3 \cdot 10^{-3} \quad \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (136)$$

L'intersezione della retta con l'asse dei tempi permette di calcolare α .

In effetti la formula approssimata (135) dà:

$$\xi = 0$$

da cui

$$\left(\frac{4\alpha t_0}{\gamma r^2} \right) = 1$$

dunque:

$$\alpha = \frac{\gamma}{4} \frac{r^2}{t_0} = 0,445 \frac{r^2}{t_0} \quad (137)$$

Nel caso del nostro esempio si trova $t_0 = 50$ minuti = 3.000 [s]. quindi si ha:

$$\alpha = 0,445 \frac{16^2}{3.000} = 3,8 \cdot 10^{-2} \quad \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

Il prodotto K H della permeabilità per lo spessore della falda è la ben nota trasmissività da taluni è anche chiamata anche "FORZA IDRAULICA" della falda.

Esso ha le dimensioni $[L^2T^{-1}]$ e si esprime in generale in $[\frac{m^2}{s}]$.

Si ha:

$$\alpha = \frac{kH}{S} \quad (138)$$

con

S è il "coefficiente di immagazzinamento" che corrisponde alla porosità effettiva nei casi di una falda a superficie libera, mentre come è noto, nel caso di una falda in pressione

$$m = (m_v + n\beta) \gamma H$$

e dove:

m_v = coefficiente di comprimibilità del "terreno"

b = coefficiente di comprimibilità dell'acqua

n = porosità del terreno

g = peso specifico dell'acqua

S = coefficiente di immagazzinamento (adimensionale).

Si trova nel caso del nostro esempio:

$$m = k \frac{H}{\alpha} = \frac{3,3 \cdot 10^{-3}}{3,8 \cdot 10^{-2}} = 0,087$$

Nel corso della risalita del livello piezometrico dopo l'arresto del pompaggio, l'abbassamento è dato da:

$$\xi = \frac{Q}{4\pi KH} \log_n \left(\frac{t}{t - \tau} \right) \quad (139)$$

Q è la quantità pompata, e τ il tempo che è durato il pompaggio. Il tempo t è contato a partire dal principio del pompaggio.

Questa formula è approssimata e valevole nelle vicinanze del pozzo per i valori $t - \tau$ relativamente grandi cioè per valori di $x = \frac{t}{t - \tau}$ relativamente piccoli.

La figura 23 mostra come si interpreta una prova di risalita della falda: gli abbassamenti sono riportati in un grafico in funzione del logaritmo di $x = \frac{t}{t - \tau}$.

Per tutti i piccoli valori di x , i punti si allineano su una retta passante per l'origine ($\xi = 0$; $\log(x) = 0$, ossia $x = 1$).

Il prodotto $K H$ è dato dalla pendenza di questa retta:

$$K H = \frac{Q}{4\pi \xi} \log_n \left(\frac{t}{t - \tau} \right) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\log_n x}{\xi} \quad (140)$$

Si ha nel caso dell'esempio considerato:

$$\frac{\log_n x}{\xi} = \frac{\log_5 x}{0,27} = \frac{2,3 * 0,7}{0,27} = 5,96$$

$$kH = \frac{7 * 10^{-3}}{4} * 5,96 = 3,3 * 10^{-3} \quad \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

Si ritrova il valore precedente.

figura 23 - vedi allegato

Si noti che la prova di risalita non dà che la trasmissività, pertanto occorre ricorrere a metodi diversi per ottenere il coefficiente di immagazzinamento questi infatti lo si deduce dalla prova di pompaggio.

1.3.2.2 Misure di tipo non puntuale

1.3.2.1 Caso di più pozzi o di un pozzo con uno o più piezometri.

È questo il caso che permette prove più esaurienti, più veloci e quindi meno costose. Ciò in quanto possono essere eseguite le misure necessarie senza attendere

che si stabilizzi il regime quasi permanente (si ricorda che il regime permanente in senso stretto nei pozzi non può essere mai raggiunto).

Con una sola prova di pompaggio possono essere eseguite due diverse determinazioni delle caratteristiche del pozzo:

- una con i dati rilevati durante l'estrazione dell'acqua;
- una con i dati rilevati dopo la fine dell'emungimento (cioè durante la fase di risalita dell'acqua nel pozzo).

Durante l'emungimento, a portata Q costante e nota, si misura ad intervalli di tempo prefissati l'abbassamento subito dal livello piezometrico nel pozzo e nel piezometro distante r dal pozzo in emungimento e si costruisce un grafico con in ascisse, su scala logaritmica, i tempi ed in ordinata, su scala normale, gli abbassamenti.

I punti così individuati dovrebbero essere allineati almeno per r dell'ordine di qualche decina di metri (altrimenti in luogo della (102) varrà la (98) e cadranno queste conclusioni).

Il coefficiente angolare m della retta che interpola i punti $(\log t, \xi_r)$ e l'intercetta t_0 sull'asse delle ascisse permettono, rispettivamente il calcolo di T ed S tramite le:

$$T = 0,183 \frac{Q}{m} \quad [m^2/s] \quad (103)$$

ed:

$$S = \frac{r^2}{2,25 t_0} \quad [m^2/s] \quad (104)$$

Durante la fase di risalita si può dimostrare che vale la:

$$\xi = 0,183 \frac{Q}{T} \log\left(\frac{t}{t-\tau}\right) \quad (105)$$

(dove τ è la durata del pompaggio misurato a partire da $t=0$, cioè dall'inizio del pompaggio) con la stessa approssimazione della (98).

Rilevando il livello della falda nel piezometro in differenti periodi è ancora possibile costruire un grafico con in ascisse, su scala logaritmica, i valori di $\frac{t}{(t-\tau)}$ ed in ordinata, su scala normale, i valori degli abbassamenti.

I punti così individuati dovrebbero, per la (105) risultare allineati.

Detto m il coefficiente angolare della retta così definita, il valore di T sarà ancora dato dalla (103). Non è possibile, durante la risalita valutare S .

Quanto detto finora è relativo alla falda artesianiana, per la freatica valgono considerazioni analoghe.

In questo caso converrà parlare, anzichè di trasmissività di permeabilità K che potrà essere valutata tramite la:

$$K = 0,733 \frac{Q}{h_1^2 - h_2^2} \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (107)$$

dove h_1 ed h_2 sono le altezze.

All'inizio di un tempo di pompaggio sufficientemente lungo si può scrivere per tutti i piezometri:

$$KH = \frac{Q}{2\pi(\xi_2 - \xi_1)} \log_n \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (141)$$

e interpretare le misure piezometriche come se il regime fosse permanente.

Se si porta l'abbassamento in ordinate e il logaritmo del raggio in ascisse (fig. 24) i punti rappresentanti i diversi piezometri si allineano su una retta che taglia l'asse $\log_{10}(r)$ in un punto corrispondente al raggio di azione R_a del moto quasi permanente.

Si è notato che per i piezometri più lontani l'abbassamento effettivo è maggiore di quello che ne indica l'approssimazione logaritmica.

Nel nostro caso, il piezometro distante 64 m. dal pozzo dà un abbassamento sensibile quando è situato all'esterno del raggio di azione.

Quando la prova è effettuata in una falda a superficie libera e l'abbassamento nel pozzo e nelle sue vicinanze è notevole per il rapporto allo spessore H . iniziale della falda, si sostituirà la formula (141) con

$$K = \frac{Q}{\pi(h_1^2 - h_2^2)} \log_n \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (142)$$

dove h_1 e h_2 sono le altezze d'acqua misurate nei piezometri contate a partire dalla quota del fondo impermeabile. Si riottiene la formula (141) ponendo:

$$h = H - \zeta$$

e

$$H = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

La prova di pompaggio in un pozzo attraversante interamente la falda, permette solamente di determinare la permeabilità orizzontale. Infatti la teoria utilizzata per l'interpretazione implica che il deflusso sia sensibilmente orizzontale cioè non influenzato dalla permeabilità verticale.

L'anisotropia del terreno non ha dunque influenza sulla prova perchè si manifesta in un piano orizzontale.

figura 24 - vedi appendice

Se K_x è la più grande permeabilità orizzontale e K_y la più piccola basterà porre, come già visto in precedenza

$$k = \sqrt{K_x * K_y}$$

e sostituire ad r

$$\rho = \sqrt{m * r}$$

dove

$$m = \frac{K_x + K_y}{2\sqrt{K_x * K_y}} - \frac{K_x - K_y}{2\sqrt{K_x * K_y}} \cos(2\theta)$$

ed è la funzione caratteristica di una direzione e dipende dall'angolo θ che farà questa direzione con quella della più grande permeabilità orizzontale.

Un'altra prova non puntuale può essere quella qui di seguito descritta.

figura 25 - vedi appendice

Ad esempio si infiggono dei pozzi tubolari tutto attorno ad un pozzo centrale di emungimento P (figura 25) fino a raggiungere lo strato impermeabile e si rileva la superficie piezometrica, delle osservazioni dei livelli nei singoli pozzi, quando la portata Q emunta da P si mantiene costante (regime perturbato stabile).

Si determinano le linee di livello (isoidroipse) della superficie piezometrica attorno al pozzo P, cioè le linee punteggiate in figura, ciascuna corrispondente ad un'altezza h sullo strato impermeabile; considerando un tratto Δs di una di esse, non troppo vicina al pozzo e misurando la pendenza I, media nel tratto, della piezometrica (differenza di quota tra le linee di livello prossime, divisa per la loro distanza) si avrà, essendo $h \cdot \Delta s$ la porzione di superficie cilindrica normale alle linee di flusso.

$$Q = K \sum (h \cdot \Delta s \cdot I)$$

Noto Q, che si può misurare, facendo defluire l'acqua pompata sopra uno stramazzo di misura, si ottiene:

$$K = \frac{Q}{\sum (h \cdot \Delta s \cdot I)}$$

1.3.2.2 Caso di più pozzi o di un pozzo con uno o più piezometri, esempio numerico

Applicazione alla determinazione del coefficiente K di uno strato artesiano.

Consideriamo il pozzo artesiano, al centro della figura seguente.

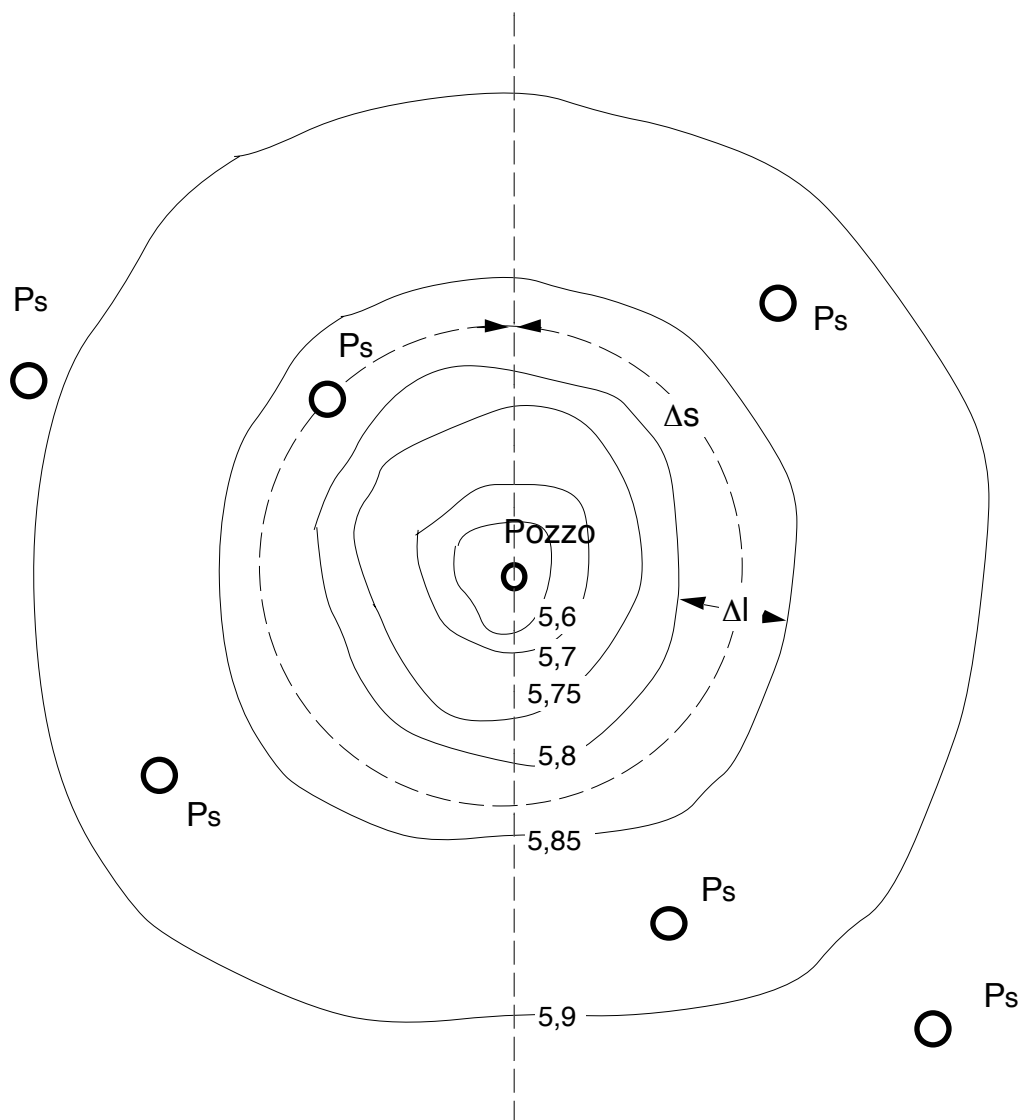


Fig. 26 - Esempio di prova di emungimento in acquifero con più pozzi

Con le quote rilevate nei pozzi di spia P_s prodotte dalla pompatura in P fino a condizioni di permanenza, si sono costruite le curve isopieziche ogni 5 cm. come indicato nella figura precedente.

Conoscendo lo spessore $S_p = 11,4$ m della falda filtrante, la portata $Q = 0,0117$ [mc/s]. emunta dal pozzo, si può calcolare il coefficiente di filtrazione mediante la:

$$K = \frac{Q}{S_p \sum (h^* \Delta s * I)}$$

(in questo caso lo spessore di falda S_p è costante).

Applicando la sopracitata formula tra le isopieziche 5,80 e 5,85 e considerando i tratti Δs sulla curva media, essendo i la pendenza media in ciascun tratto data da:

$$i = \frac{5,85 - 5,80}{\Delta l}$$

si ha:

$$K = \frac{0,0117}{11,4 \left(40 \frac{0,05}{13,5} + 40 \frac{0,05}{14} + 57 \frac{0,05}{12,1} + 40 \frac{0,05}{14} \right)} = \frac{0,0117}{7,6279} = 0,00153 \quad [\text{m/s}].$$

1.4. Gli aggottamenti

Spesso per l'esecuzione di varie opere di ingegneria si deve ricorrere ad aggottamenti., cioè ad emungimenti dalla falda per prosciugare scavi e trincee si da permettere di potervi lavorare all' interno.

Nella seconda sezione della presente parte faremo riferimento alle tecnologie che possono servire allo scopo.

Al momento facciamo riferimento alla trincea della figura seguente:

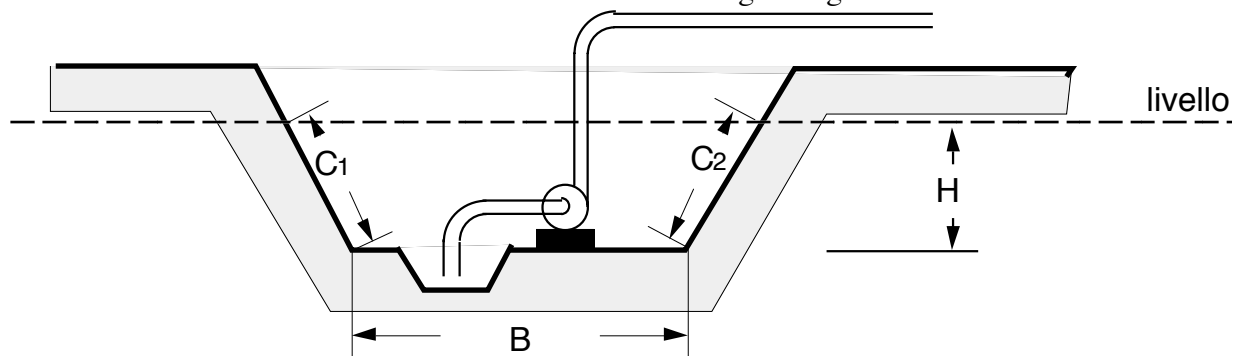


Fig. 27 - Schema di aggottamento acque da trinceai

dove, oltre ad essere indicata la trincea è posizionato il livello idrostatico della falda, livello che deve essere abbattuto sino al fondo della trincea stessa.

All' uopo in figura, è predisposto una piccolo scavo per l'alloggiamento del tubo di aspirazione di una pompa, ma questo di figura è solo uno schema.

La figura seguente illustra invece l'andamento della piezometrica intorno alla trincea durante l'aggottamento:

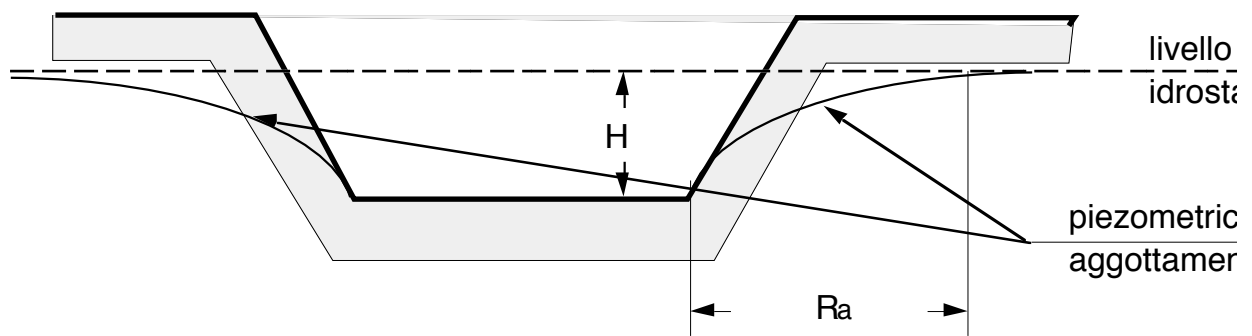


Fig. 28 - Andamento della piezometrica in prossimità di una trincea

E' tuttavia da tener presente che la situazione sopra rappresentata è a volte solo teorica, infatti spesso la falda che si intercetta con lo scavo non trovasi in condizioni idrostatica ma in moto, quindi la superficie piezometrica indistribuita é, di norma non orizzontale, ciome indicato nella figura che segue.

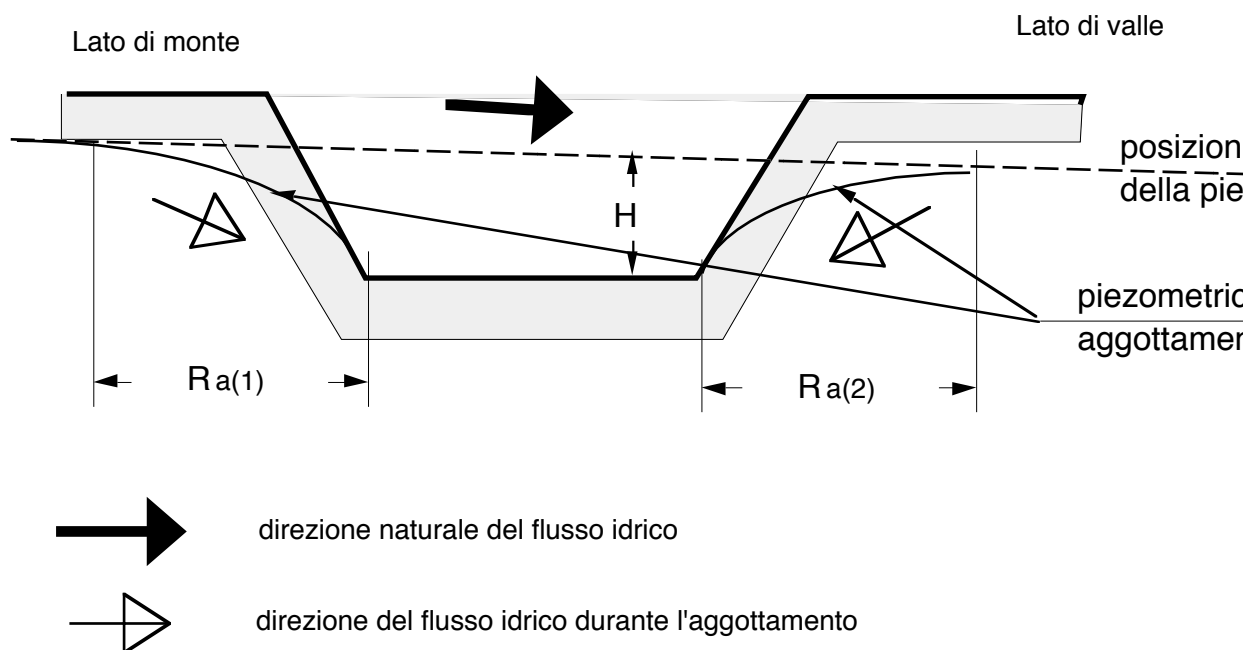


Fig. 29 - Andamento dei flussi in prossimità di una trincea

In quanto sopra si è fatto esclusivo riferimento alla falda freatica, che è quella interessata da aggotamenti.

Dal punto di vista idraulico non sono applicabili le formule già viste per le trincee in quanto il flusso idrico avviene oltre che dai lati anche dal fondo.

Poi, in particolare le formule già viste (115) non tengono affatto conto della possibilità che la falda indisturbata sia in moto.

Invero uno studio dettagliato deve poi anche tener conto delle possibili variazioni di permeabilità tra i vari strati che compongono il terreno scavato dalla trincea.

Per esempio nello scavo della trincea per la costruzione del collettore fognario rivierasco di Pescara si è trovata la situazione rappresentata in figura:

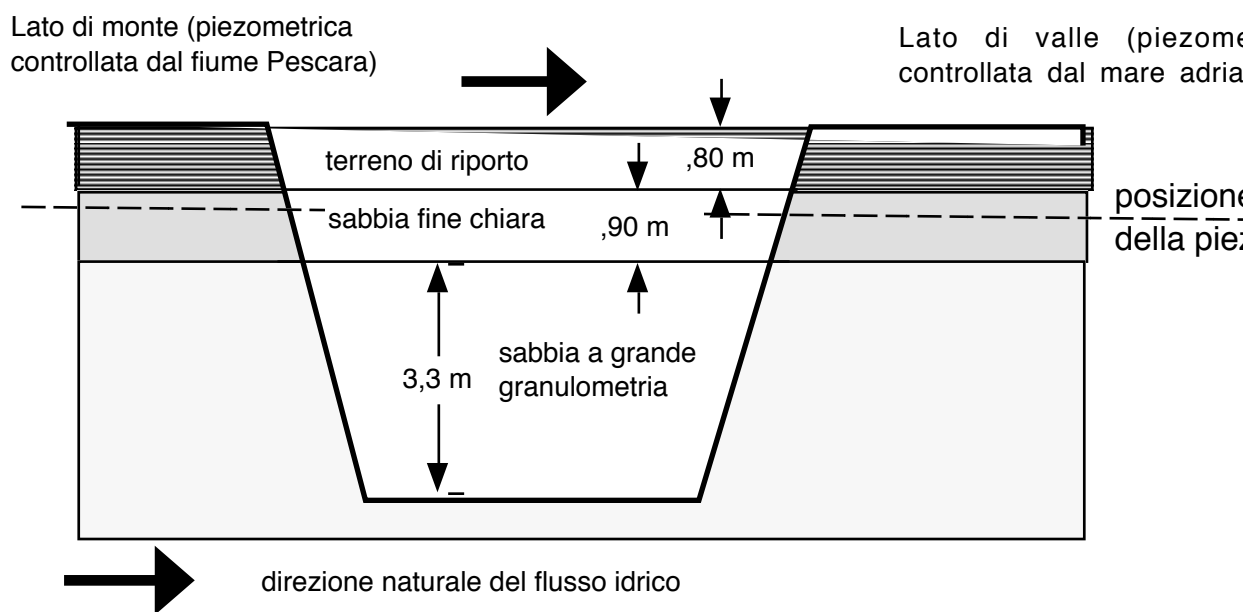


Fig. 30 - schematizzazione della trincea scavata per la costruzione del collettore rivierasco di Pescara

che evidentemente inficia l'uso della (115)

- 1.5. I drenaggi*
- 1.6. La filtrazione attraverso argini e dighe*
- 1.7. L'interferenza con altre opere nel sottosuolo
- 1.8. Paratie e sbarramenti sotterranei
- 1.9. Discariche

PARTE III

GLI ASPETTI COSTRUTTIVI DELLE OPERE DI CAPTAZIONE

2.1. Le opere di captazione

2.1.1 Le Sorgenti

2.1.2 I pozzi e le trincee

Prima di introdurre le opere di captazione delle sorgenti è opportuna una classificazione delle stesse in funzione delle possibilità di sfruttamento delle stesse.

Nel passato i pozzi venivano scavati a mano. Trattavasi di opere in genere circolari del diametro oscillante dal metro sino ad una decina di metri.

Oggi l'operazione di terebrazione²⁶ dei pozzi avviene con apposite macchine.

2.2. Gli scavi e gli aggottamenti.

La realizzazione di scavi in terreni ove è presente una falda acquifera è a volte di grande rilevanza tecnica per le numerose difficoltà che si possono incontrare, specie se tali scavi avvengono in prossimità di abitati o di strutture od infrastrutture che arrechino soggezione agli operatori.

L'aggottamento di acqua il più delle volte è realizzato o con semplici pompe, o nei casi più seri tramite well-point, (cioè pozzi puntuali, detti aghi) che disposti in linea a distanza di circa 80 cm un metro di fatto costituiscono, come abbiamo visto, una vera e propria trincea.

Si circonda così l'impronta della trincea scavanda con tali aghi aspiranti, che poi vengono collegati ad una tubazione che, a sua volta, è collegata con una pompa.

Tuttavia, talvolta possono verificarsi le seguenti ipotesi :

- il sistema di aggottamento non è sufficientemente potente (cioè non si riesce ad esaurire l'acqua che perviene alla trincea);
- é possibile provocare franamenti dei fronti di scavo;

²⁶ In termine terebrazione viene dal latino terebra, che significa trapano, succhieruola.

- se le profondità sono considerevoli e le pareti degli stessi inclinate, si ha una sezione di scavo, in superficie, molto larga, con conseguente maggiore quantitativo d'acqua da aggotare

Pertanto in tali condizioni è necessario studiare metodi alternativi e complementari al semplice aggotamento con well-point

In termini generali²⁷ orrorerà far precedere alle scelte progettuali:

- a) da una campagna geognostica ed idrogeologica al fine di ottenere i parametri del terreno ed idrologici necessari ;
- b) da uno studio riguardante le interazioni tra le condizioni geotecniche preesistenti, lo scavo e la costruzione oggetto degli scavi;

In particolare gli elementi da rilevare sono:

- parametri geotecnici dell' acquifero;
- parametri idraulici dell' acquifero (livello idrico, permeabilità, ecc..)
- la presenza di edifici o di altre strutture od infrastrutture la cui stabilità sarebbe influenzata dagli aggotamenti.

Le soluzioni possibili sono:

- a) infissione di paratie a monte ed a valle sino a profondità sufficienti allo scopo di impedire o comunque da rendere difficoltoso il percorso delle acque sotterranee;
- b) impermeabilizzazione delle pareti dello scavo con iniezioni ad alta pressione KAJMA od equivalenti;

²⁷ E' ovvio che a volte le operazioni potranno essere più semplici a seconda delle condizioni cui si opera.

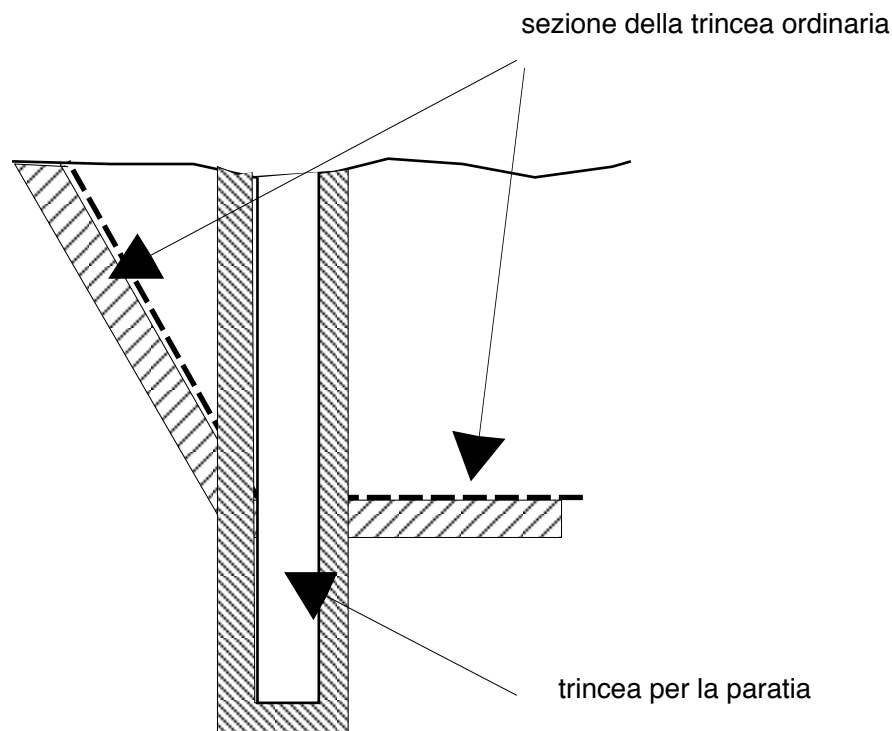
- c) impermeabilizzazione locale delle pareti dello scavo precedentemente alla esecuzione dello stesso con iniezioni di cemento in pressione;
- d) realizzazione lungo le pareti dello scavo di palancolature in acciaio od in cemento armato (tipo LARSEN).

Tutti questi metodi rivestono il duplice compito di impedire l'accesso dell'acqua nello scavo o di facilitarne l'aggettamento e quello di reggere le pareti dello scavo stesso.

Nei paragrafi che seguono vengono esaminati i vari metodi.

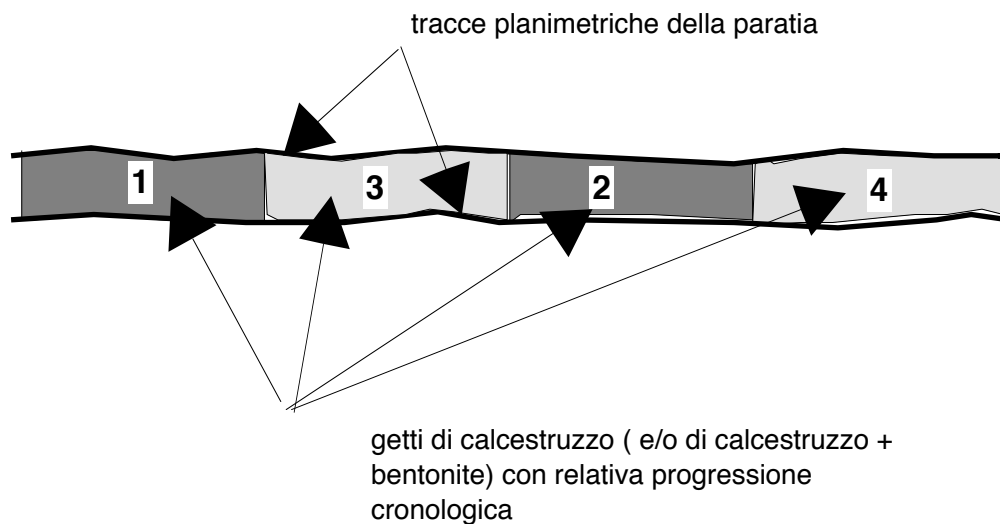
2.2.1 Paratie

Trattasi dello scavo, con apposite apparecchiature, di una trincea profonda almeno 1,5 volte quella che dovrà essere realizzata successivamente e larga da 80 a 100 [cm].



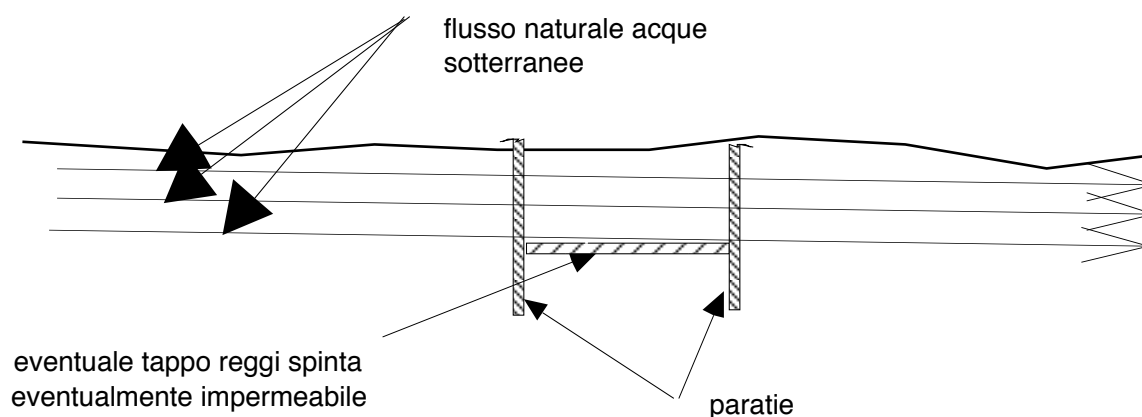
Di norma tali trincee vengono scavate per tratti successivi e spesso alternati tra loro, come illustrato nella figura seguente, della lunghezza di circa 3 [m].

Una volta effettuato lo scavo, vengono, in esse gettate del calcestruzzo (a volte bentonitico, a volte armato).

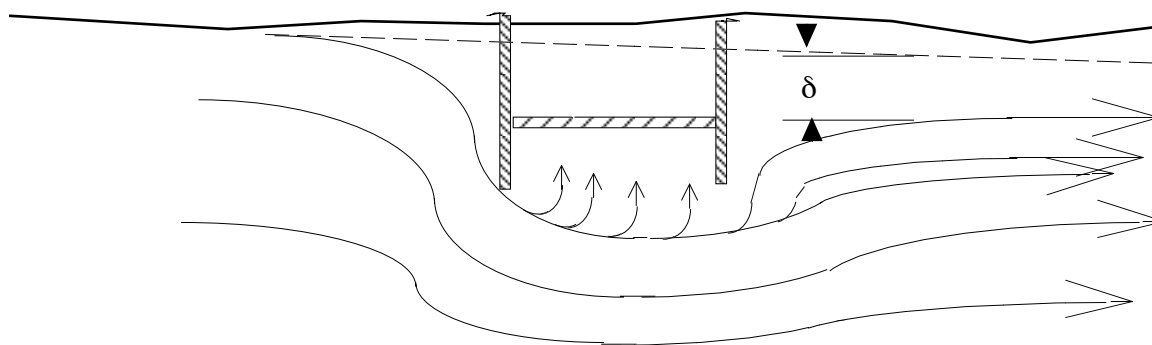


Se tale operazione, come nel caso in esame, è propedeutica allo scavo di trincee allora le paratie dovranno essere due, come nella figura successiva.

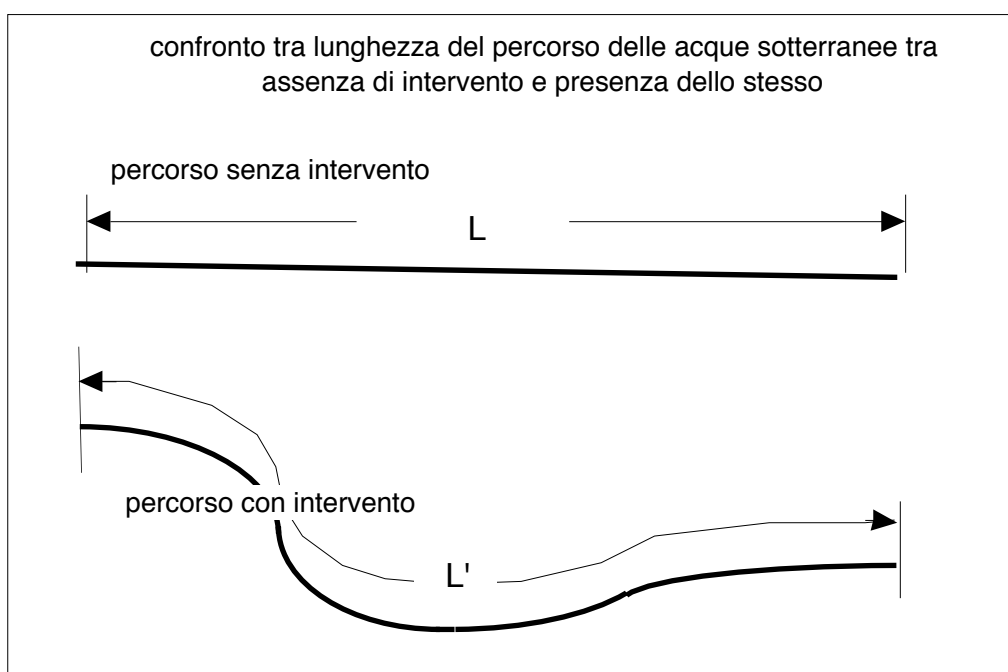
Una volta realizzate si potrà scavare al loro interno con le normali macchine operatrici.



Le pareti delle paratie, in questo caso armate, e, ove il caso tirantate, nel contempo impediranno l'afflusso idrico all'interno della trincea e reggeranno le pareti dello scavo.



Per renderci conto dell' effetto ai fini dell' aggotamento è opportuno osservare le figuree confrontarle tra loro.



L'inconveniente principale delle paratie si verifica nel caso che le caratteristiche del terreno siano estremamente permeabili ,in tal caso per un risultato utile dal punto di vista dell'aggotamento della falda occorrerà spingerle tanto al di sotto del piano di campagna sin dove sono presenti livelli limosi e/o argillosiin grado di assicurare l'effetto voluto.

Una tale opera inoltre realizza di fatto una diga al deflusso delle acque sotterranee.

Queste non potendo oltrepassare la paratia si eleverebbero di livello e potrebbero venire a giorno con gravi conseguenze

2.2.2 Metodo Kajma

Il metodo Kajma consiste nel consolidare con getti di cemento ad alta pressione il sottosuolo nella zona interessata.

La miscela viene proiettata ad alta pressione (60-300 Atm.), in una perforazione, mediante una sonda con ugello eccentrica.

A causa di tale modalità il sistema produce una colonna di terreno cementato a diametro variabile (2000 - 3000 mm.) a seconda della consistenza del terreno stesso.

In particolare si dovrebbero sottoporre a Kajma due strisce del sottosuolo stradale per una profondità di circa 6 metri (da 1.5 a 2 metri al di sotto del piano di posa del collettore).

Tale approfondimento, al di sotto del detto piano di posa, è necessario per l'immorsamento ed il contrasto delle pareti trattate con Kajma infatti le dette pareti realizzano una sorta di muro di sostegno in calcestruzzo a bassa resistenza, per motivi prudenziali nei calcoli che seguono si assume per tale calcestruzzo una sigma ammissibile intorno a 30 Kg/cmq.

Tali pareti sono quindi sottoposte a sollecitazioni del tipo ribaltamento, scorrimento, schiacciamento, taglio alla base, cioè le sollecitazioni tipiche del muro di sostegno.

Per contrastare la sollecitazione a scorrimento si prevede la realizzazione nel fondo dello scavo di iniezioni di cemento che di fatto realizzano anche un tappo impermeabile alle acque provenienti dal sottosuolo.

Per espletare tale ultima funzione occorrerà additivare la malta da iniettare con bentonite.

Tuttavia l'uso abbondante di tale materiale diminuirebbe la resistenza meccanica; pertanto è preferibile tollerare una modesta permeazione di acqua aggottabile con pompe sommergibili da cantiere anzichè realizzare un tappo del tutto impermeabile, ma poco resistente.

L'adozione di tale metodo non sbarra, inferiormente, il deflusso delle acque sotterranee alle quali quindi rimane la possibilità di proseguire il loro percorso verso il mare seppure con qualche modesto, eventualmente calcolabile, innalzamento del livello freatico a monte.

2.2.3 Iniezioni di cemento.

Di tale sistema si fa solo un breve cenno in quanto per i motivi esposti di seguito non lo si è ritenuto idoneo al nostro caso.

Esso consiste nell'iniezione di cemento in fori precedentemente praticati nel terreno.

Per assicurare una buona tenuta delle pareti è necessario iniettare malte con forte concentrazione di cemento mentre al contrario per impedire infiltrazioni del fronte di scavo è necessario aggiungere bentonite con perdite delle caratteristiche meccaniche.

Oltre le problematiche di cui sopra, tale metodo non dà sufficiente garanzia in quanto le iniezioni non sono controllabili, infatti non è possibile prevedere l'estensione del getto che potrebbe interessare anche zone profonde.

Altro inconveniente è la modesta resistenza meccanica, a meno che non si faccia ricorso a miscele speciali con l'aggiunta di resine epossidiche.

2.2.4 Pancolate

Esso consiste nell'infiggere nel terreno delle strutture sottili in acciaio od in calcestruzzo;

L'infissione avviene per percussione.

Di norma esse rappresentano un valido sistema per il contenimento dell'acqua e della terra.

Tuttavia per entità di scavo come quella in esame è in genere necessario l'applicazione di tiranti atti ad evitare gli inconvenienti dovuti alla eccessiva flessibilità delle strutture costituenti le paratie.

Inoltre l'infissione delle palancole che, come detto in precedenza, avviene per percussione, deve essere spinta sino al raggiungimento di livelli poco permeabili (circa 12.00 metri dal piano di campagna).

Le operazioni di percussione producono vibrazioni nel terreno e conseguentemente negli edifici in vicinanza della zona di infissione con ovvie negative conseguenze per la statica delle stesse, senza tener conto degli effetti negativi sulla loro abitabilità durante le dette operazioni.

2.3. I drenaggi

PARTE III - I MODELLI MATEMATICI

(in collaborazione con la dr. Giuseppa RIBIGHINI)

1. Il modello bidimensionale alle differenze finite sul piano orizzontale*
2. Il problema diretto*
3. I problemi inversi*
- 3.1 Il problema inverso banale*
- 3.2 Il problema inverso di identificazione*
4. Il modello tridimensionale*

La (49) e la (61.), sebbene relative ad acquiferi artesiani, sono, sovente, anche utilizzate per lo studio di falde freatiche. Di norma in tali studi si fa l'ipotesi che le variazioni della quota piezometrica H non modificano sostanzialmente lo spessore della falda freatica. In questo studio tale ipotesi non può essere accettata. Infatti si vogliono esaminare le modifiche dello spessore della falda a seguito della presenza di opere di Ingegneria. Questo significa che non si può ritenere lo spessore costante ma lo si deve supporre variabile nel tempo. In termini matematici detto e lo spessore dell'acquifero sarà $e = e(x,y,t)$, con xy piano orizzontale.

Il problema in esame è quindi un problema di frontiera libera e la sua soluzione approssimata è stata affrontata per via numerica .

Infatti sono funzioni del tempo anche gli spessori delle celle delimitate superiormente dalla superficie piezometrica e che nel seguito saranno dette celle superficiali. Inoltre viene anche stabilita la massima escursione della superficie piezometrica, convenendo che le superfici inferiori di dette celle debbano essere sempre poste a quota superiore al minimo livello della superficie freatica. Questa è una necessità imposta dalla struttura del modello.

Tale limitazione è molto restrittiva nel caso di notevoli escursioni della superficie piezometrica, perché il modello matematico richiede un sol valore di K per ogni maglia superficiale, la quale, invece, potrebbe interessare strati con diversa permeabilità. Si può

ovviare tuttavia all' inconveniente con l'utilizzo di un K corrispondente al valore medio pesato con la potenza degli strati.

Come già detto, la H varia linearmente nel passare da un baricentro all'altro; questo ci permette di ricavare i valori ΔZ_k da introdurre nella (61) per calcolare le aree delle sezioni verticali attraversate dal flusso idrico relativamente alla generica cella superficiale.

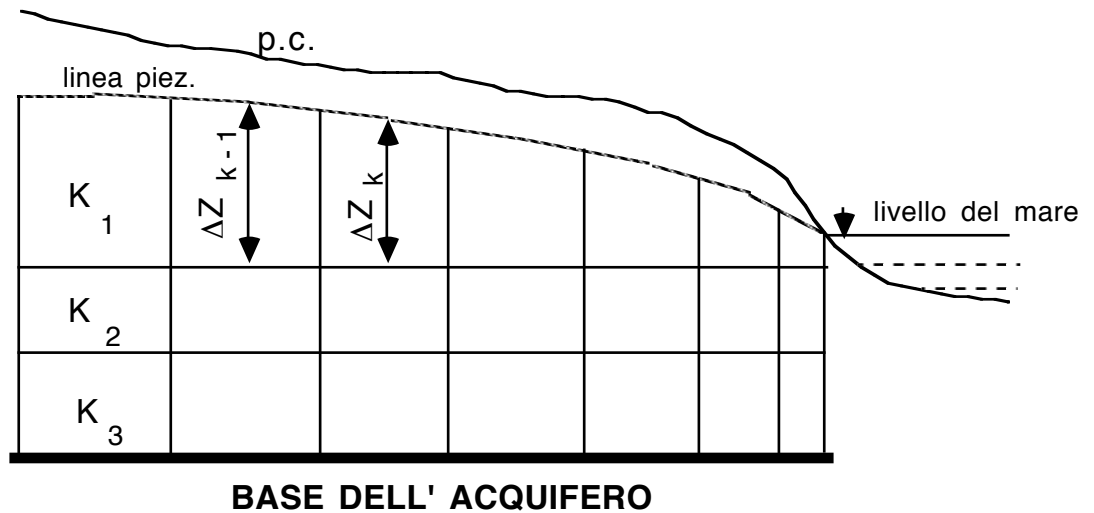


fig.-.

Note quindi le condizioni al contorno e i valori iniziali delle H l'insieme delle (61), scritte per tutte le celle del nostro dominio, costituisce un sistema non lineare in H di N equazioni in altrettante incognite, che può essere sintetizzato nella formula matriciale (a rigore valida solo per sistemi lineari)

$$AH = B + S \frac{H^n - H^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} \quad (62)$$

dove:

- A e' la matrice dei coefficienti del sistema di ordine $N \times N$;
- H e' il vettore dei potenziali incogniti di ordine N, relativo ad un tempo variabile tra t_n e t_{n-1} ;
- B e' il vettore dei termini noti di ordine N;

S e' una matrice diagonale di ordine $N \times N$;

H_n e H_{n-1} sono i vettori dei potenziali incogniti di ordine N calcolati all'istante n -esimo e all'istante $(n-1)$ -esimo.

La non linearità del sistema (62) dipende dal fatto che tra le incognite compaiono le ΔZ_k moltiplicate per H .

Discretizzando le H a primo membro della (62) con il metodo di CRANK - NICHOLSON, secondo il quale il valore di H puo' essere espresso, punto per punto, in funzione del suo valore all'istante n -esimo ed all'istante $(n-1)$ -esimo secondo l'espressione:

$$H = (1 - \theta) H_{n-1} + \theta H_n \quad (63)$$

con $0 \leq \theta \leq 1$, si perviene alla :

$$A[(1 - \theta) H^{n-1} + \theta H^n] = B + S \frac{H^n - H^{n-1}}{t^n - t^{n-1}} \quad (64)$$

Posto ora:

$$D = A\theta - \frac{S}{t^n - t^{n-1}}$$
$$E = B - \left[\frac{S}{t^n - t^{n-1}} + A(1 - \theta) \right] H^{n-1} \quad (65)$$

si ottiene infine :

$$D H^n = E \quad (66)$$

che è un sistema "apparentemente" lineare in H^n .

Va ricordato che la matrice A , e di conseguenza la D , gode delle seguenti proprietà:

- a) è una matrice sparsa (cioè con molti termini nulli), infatti i coefficienti diversi da zero sono al più sette e, tenendo conto che in genere $N \gg 7$, segue l'asserto;
- b) ha diagonale principale dominante, ovvero sussiste la relazione:

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

c) é simmetrica, cioe':

$$a_{i,j} = a_{j,i} .$$

La b), che definisce un criterio di debole convergenza per metodi iterativi, porta a sconsigliare l'uso di metodi risolutivi della (66) tipo quelli di Jacobi o di Gauss-Seidel, mentre l'uso di metodi di rilassamento, benché più rapidamente convergenti, richiede maggior lavoro per la ricerca dei coefficienti relativi. Si è ritenuto pertanto opportuno adottare per la risoluzione del sistema il metodo del gradiente coniugato di Hestness e Stierfel, che ben si adatta a tale tipo di approccio.

Per equazioni diverse, ma di eguali caratteristiche algebriche, detto metodo è già stato ampiamente utilizzato da vari A.A. in campo idraulico con ottimi risultati .

La (66) puo' essere risolta iterativamente partendo da un valore di tentativo dei ΔZ_k delle celle superficiali con cui calcolare, in prima approssimazione, i valori dei coefficienti della matrice A e del vettore B.

Lo schema logico, nel caso di moto non stazionario, è riportato in figura 5.

In questo modello si possono introdurre, con sufficiente precisione, le modifiche che opere di ingegneria interessanti il sottosuolo arrecano alle caratteristiche idrauliche dell'acquifero. Cio' si ottiene annullando in ciascuna delle maglie interessate il valore della permeabilità K, rendendole, cioè, impermeabili.

5. Modelli bidimensionali su piani verticali*

Il modello tridimensionale, che risolve numericamente la (61), pur consentendo di tenere conto della presenza di opere di Ingegneria interessanti l'acquifero, presenta un elevato numero di incognite con conseguenti tempi di elaborazione molto lunghi. Pertanto si è cercato di verificare se la (58) consenta di tenere ugualmente conto del posizionamento delle opere di ingegneria tramite una opportuna definizione di T. Si passa così, ovviamente, da un modello tridimensionale ad uno bidimensionale con notevole riduzione dei tempi di calcolo e quindi di costo.

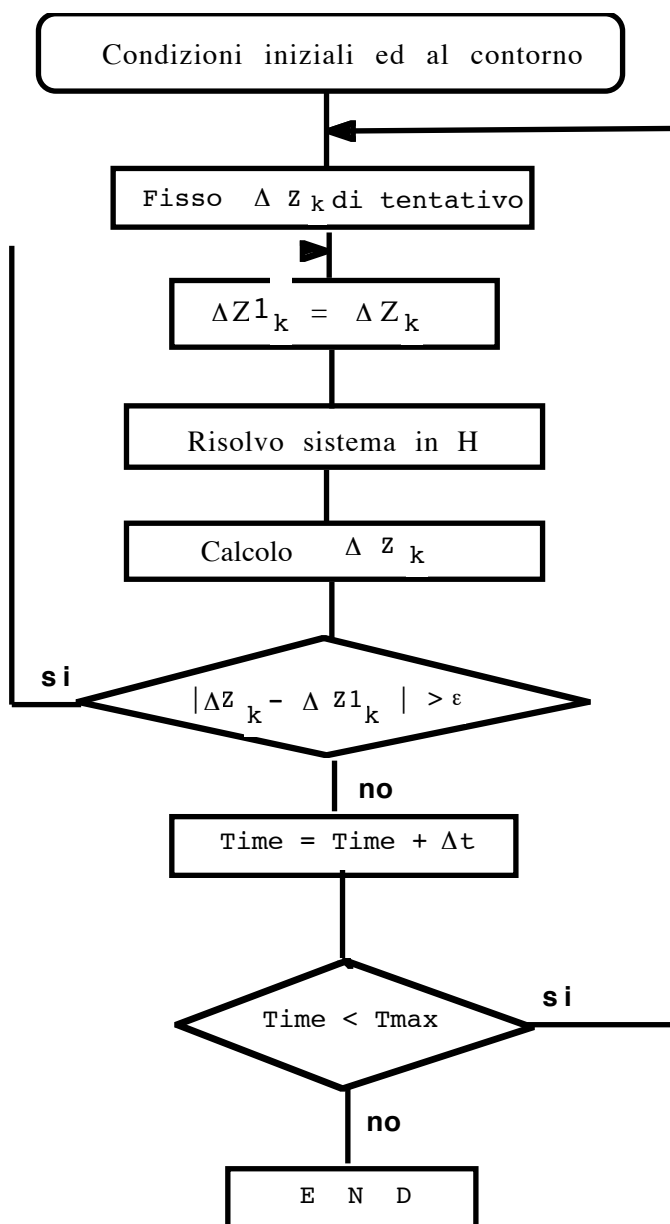


Fig.

Nella (58) ovviamente varranno ancora le:

$$T = K_m * e$$

$$Q = q * e$$

$$S = S_u * e$$

(67)

con $e = e(x,y,t)$ potenza della falda coincidente con $H=H(x,y,t)$.

L'utilizzo della (58) è legato alla possibilità di definire il valore da attribuire a K_m che rappresenti l'insieme delle permeabilità K_m dei singoli strati sovrapposti costituenti il materasso alluvionale.

Nel caso di una maglia non interessata da modifiche di permeabilità e' sufficiente definire K_m come media pesata, rispetto agli spessori dei singoli strati, delle K_i degli strati stessi, cioè :

$$K_m = \frac{\sum k_i h_i}{\sum h_i} \quad (68)$$

Ben più complessa, invece, si presenta la ricerca di una formula per il calcolo di K_m nel caso di una maglia avente al suo interno delle zone dove la

permeabilità abbia subito delle modifiche.

Il criterio scelto e' stato il seguente.

Si sono ipotizzati, nel modello tridimensionale, diversi tipi di stratigrafia e annullate di volta in volta le permeabilità delle maglie situate lungo la stessa verticale e calcolate le nuove quote piezometriche prodotte dallo sbarramento sotterraneo dopo il raggiungimento del regime stazionario. Si è quindi passati al modello bidimensionale per ricercare i valori di K_m che inseriti nella (58) dessero i medesimi risultati, sempre nel caso di regime stazionario. Come primo esempio di calcolo si è fatto riferimento al caso di Pescara già illustrato. In tale situazione si devono ritenere note le condizioni idrauliche, geologiche, geometriche e topografiche dell'acquifero interessato dalla costruzione di un collettore fognario. Si è quindi matematicamente rappresentata tale operazione ed è stato applicato il modello tridimensionale con l'opera di Ingegneria in esame. Il modello ha consentito di determinare la nuova superficie piezometrica. Si sono riscontrati infatti scarti nel calcolo della piezometrica, ottenuta col modello bidimensionale, rispetto a quella ottenuta col modello tridimensionale, assunto quale esatto, compresi tra il 5% ed il 10%. Dalle situazioni esaminate, tramite una regressione lineare semplice, si è ottenuta la:

$$K_m = -a + (a+b) \left(1 - \frac{K_i^* h_i^*}{\sum K_i h_i} \right) \quad (69)$$

dove :

-a è il valore di K_m determinato imponendo l'arresto del flusso nella maglia in esame in direzione parallela al flusso stesso; esso viene calcolato imponendo l'annullarsi della permeabilità sul lato della maglia ortogonale al flusso entrante, ricordando che si assume una variazione di K lineare tra i baricentri di maglie adiacenti, tale valore è sempre negativo.

b è il valore di K_m originario calcolato con la (68) nella maglia in esame;

K_i^* , H_i^* sono rispettivamente il valore della permeabilità originaria e lo spessore dello strato divenuto impermeabile;

K_i , H_i sono permeabilità originaria e spessore dello strato i -esimo.

La (69) fornisce dunque il valore della permeabilità da assegnare ad una maglia del modello bidimensionale qualora lungo la sua verticale vi siano delle zone la cui permeabilità sia stata modificata.

E' evidente come nel caso di simili maglie occorra definire un valore di K_m differente per le due direzioni.

Nella direzione perpendicolare al flusso idrico varrà ancora la (68), con la sola avvertenza di considerare nullo il valore di K_i dello strato divenuto impermeabile.

Nella (69) il caso di una maglia senza alcuna modifica di permeabilità implica l'annullarsi del prodotto $K_i^* h_i^*$.

Conseguentemente b rappresenta il massimo valore di K_m . Il caso fisico di rendere impermeabile l'intero strato filtrante relativo alla maglia in esame implica :

$$K_i^* h_i^* = \sum K_i h_i$$

Conseguentemente K_m vale $-a$. I valori $-a$ (minimo) e b (massimo) rappresentano K_m nelle due situazioni fisiche estreme (totale impermeabilità e totale permeabilità).

6 Un caso di studio affrontato e con modello bidimensionale e con modello tridimensionale, confronto*.

In quanto segue faremo riferimento ad un caso concreto.

Verso la metà degli anni 80 era in costruzione, sul lungomare Nord di Pescara il collettore fognario "rivierasco" . Questi è costituito da uno speco di calcestruzzo armato delle dimensioni di $4 * 5$ [m] che interessa pressoché ortogonalmente il flusso delle acque sotterranee locale.

La figura 6 illustra il dominio della (58), la dimensione delle varie maglie e le condizioni al contorno adottate, relative al caso suddetto.

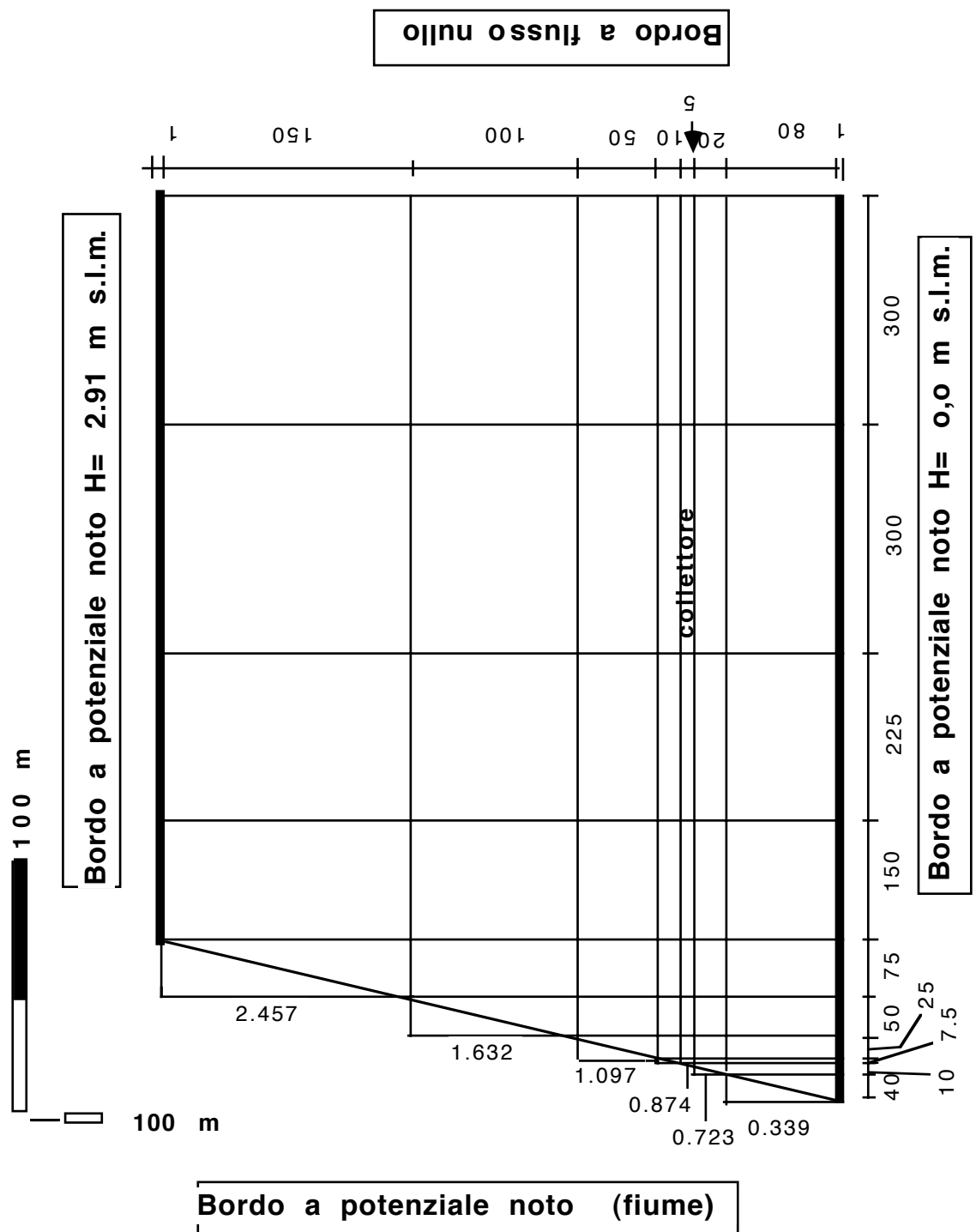


Fig.....-

I calcoli sono stati eseguiti con elaboratore PC IBM e per i due modelli i tempi di calcolo sono risultati i seguenti:

- modello tridimensionale 108 minuti
- modello bidimensionale 8 minuti

Dai dati relativi al tempo macchina, deriva un evidente vantaggio ad usare il piu' semplice modello bidimensionale soprattutto al crescere del numero degli strati costituenti il materasso alluvionale sede della filtrazione.

L'innalzamento massimo è stato valutato, per opere compiute di 60 cm.

6. Cenni al metodo degli elementi finiti*

PARTE IV

GLI ASPETTI IDRAULICI DELLE OPERE NEL SOTTOSUOLO IN PRESENZA DI ACQUE SOTTERRANEE

APPENDICE II

Tabelle e valori caratteristici

Seguono alcuni valori della permeabilità K , in funzione delle dimensioni dei grani:

nomenclatura	diametro medio	valori permeabilità	unità di misura
sabbia fine	0,1 ÷ 0,2 mm.	$K = 0,002 \div 0,007$	[cm/s]
sabbia media grandezza	0,4 ÷ 0,5 mm.	$K = 0,030 \div 0,045$	[cm/s]
sabbia grossa,	0,6 ÷ 0,8 mm.	$K = 0,070 \div 0,120$	[cm/s]
sabbia e ghiaietta	1 ÷ 3 mm.	$K = 0,5 \div 1$	[cm/s].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI